Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional del Neuquén

SEMINARIO UNIVERSITARIO DE INGENIERÍA

Guía de estudio de Matemática

Estructura Universitaria

Autoridades UTN:

Rector: Ing. Héctor Aiassa
Vicerrector: Ing. Haroldo Avetta

Autoridades Facultad Regional del Neuquén:

Decano: Ing. Pablo Oscar Liscovsky.
Vicedecano: Mg. Ing. Horacio Spesot.
Secretaria Académica: Ing. Patricia González.
Secretaria de Extensión Universitaria: Lic. Ailen Vazquez
Secretario de Ciencia, Tecnología y Posgrado: Ing. Gustavo Monte
Secretaria Administrativa: Lic. Mariana García Rolon
Secretaria de Gestión Universitaria: Lic. Cristina Winckler
Secretario de Vinculación: Ing. Walter Mardones

Introducción:

Con el objetivo de brindar al aspirante a ingreso una guía con la cual poder organizar el aprendizaje y a la vez hacer un seguimiento continuo del desarrollo de las clases, se presenta un cuadernillo impreso o digitalizado en el momento de la inscripción.

La modalidad para el desarrollo de las clases y para el mejor aprovechamiento del tiempo requiere de parte del aspirante el compromiso del estudio previo del material.
En la clase se desarrollarán algunos conceptos esenciales que servirán de herramienta básica para usar la mayor carga horaria en la resolución de situaciones problemáticas.

Al final del cuadernillo encontrará modelos de evaluación tomados en años anteriores y al acercarse a las instancias evaluativas, para evacuar dudas, se asistirá al aspirante con clases de consultas impartidas por alumnos tutores.

Es necesario decir que el carácter del siguiente material no es de ningún modo puramente informativo, sino que recopila los conocimientos útiles y necesarios para aumentar el entusiasmo de los futuros alumnos de esta casa de altos estudios.

Invita a los mismos a ampliar sus conocimientos con la bibliografía tan rica y basta acerca de las *Matemáticas*, el *Cálculo y, la Física.*

Por lo que queda abierta una gran puerta al conocimiento para todos aquellos dispuestos a atravesarla.

Por ello insistimos en la actitud de trabajo responsable que el estudiante debe asumir, sumando entusiasmo, voluntad, creatividad, apertura para superar limitaciones y espíritu crítico para avanzar con compromiso hacia un desarrollo nacional, provincial y local sustentable.

“Todo debe hacerse tan sencillo como sea posible, pero sin excederse en ello”

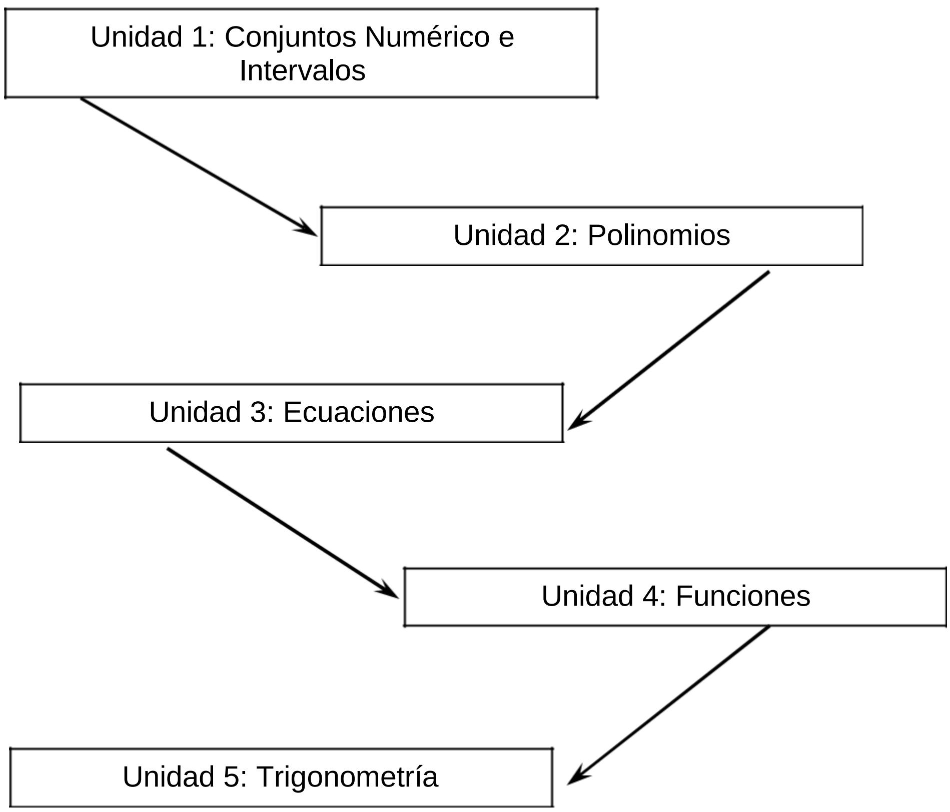
Albert Einstein

Objetivos:

Al finalizar el estudio y evaluación del seminario de nivelación el aspirante a ingreso será capaz de:

- Utilizar los contenidos brindados en el curso, que sumados a sus aprendizajes previos, le permitirán abordar los conocimientos de las asignaturas de la carrera elegida.
- Afianzar la destreza resolutiva en temas básicos como aplicación de conceptos teóricos.
- Resolver situaciones problemáticas valorando la creatividad del alumno en el planteo del problema.

Esquema conceptual del contenido del curso Matemática:



Unidad N° 1: Conjuntos Numéricos e Intervalos

1) Números Reales, Representación en la Recta Real. Operaciones y Propiedades. Raíces y Potencias.
2) Correspondencia
3) Correspondencia entre puntos de una recta y los números reales. Intervalos.
4) Valor absoluto de un número real.

Unidad N° 2: Polinomios

1. Consideraciones generales. Grado. Operaciones con Polinomios
2. Divisibilidad. Teorema del Resto.
3. Raíz de un Polinomio.
4. Expresiones algebraicas fraccionarias:

Unidad N°3: Ecuaciones

1. Ecuaciones de primer grado con una o dos incógnitas.
2. Ecuaciones de 2° grado con una incógnita.

Unidad N°4: Funciones

1. Relaciones funcionales. Función biyectiva.
2. Análisis de funciones:
    i. Dominio e Imagen.
    ii. Intervalos de crecimiento decrecimiento.
    iii. Paridad e Imparidad
3. Funciones específicas:
    i. Funciones de variable real de 1° y 2° grado.
    ii. Función Módulo o Valor Absoluto
    iii. Funciones exponencial y logarítmica.
    iv. Funciones homográficas o racionales.

Unidad N°5: Trigonometría

1. Ángulos y sistemas de medición.
2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Resolución de triángulos rectángulos.
3. Circunferencia trigonométrica.
4. Funciones trigonométricas y su análisis:
    i. Seno
    ii. Coseno
    iii. Tangente

Bibliografía Recomendada:

- Carlos Abdala (et. al.) “Matemática 1 polimodal” Ed. Aique Argentina
- De Simone Turner “Matemática” Ed. AZ
- Andrés Me Kaczor (et. al.) “Matemática 9 EGB” Ed. Santillana.
- PalloKoczor (et. al.) “Matemática 1 Polimodal” Ed. Santillana.
- PaenzaAdrian “¿Matemática, estas ahí?”.
- Louis Leithold“El Cálculo” Ed. Oxford
- Hebe T. Rabufetti “ Analisis Matemático I” Ed. Eudeba

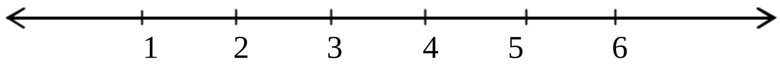
Unidad 1:
Conjuntos Numéricos e Intervalos

La noción de número es tan antigua como el hombre mismo ya que son necesarios para resolver situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, usamos números para *contar* una determinada cantidad de elementos (existen siete notas musicales, 9 planetas, etc.), para establecer un *orden* entre ciertas cosas (el tercer mes del año, el cuarto hijo, etc.), para establecer *medidas* (3,2 metros, 5,7 kg, –4ºC, etc.), etc.

1. NÚMEROS NATURALES

Al conjunto de los números que sirven para contar: {1, 2, 3, 4, ...} los llamaremos ***números naturales*** y lo notaremos con la letra $\mathbb{N}$

Estos números están ordenados, lo que nos permite representarlos sobre una recta del siguiente modo:



Actividad*:*
- *¿Se puede afirmar que todo número natural tiene un antecesor? ¿Por qué? Ejemplificar.*

....

- *¿Se puede afirmar que todo número natural tiene un sucesor? ¿Por qué? Ejemplificar.*

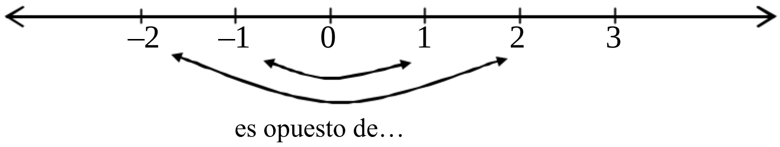
....

Como ya sabemos, sobre este conjunto de números se pueden definir ciertas operaciones como suma, resta, multiplicación y división. Observemos lo siguiente:

2. *NÚMEROS ENTEROS*

Para solucionar el problema de la resta, se crean los números negativos –1, –2, –3, etc. como opuestos de los números naturales. Además se incorpora el cero para dar solución a la resta de un número consigo mismo. El conjunto de los números naturales, sus opuestos negativos y el cero constituyen el conjunto de los ***números enteros***, que se indica con la letra z. Notemos que $\mathbb{N} \subseteq z$.

Su representación sobre la recta numérica es la siguiente:



Veamos algunos ejemplos:

- El opuesto de 2 es –2.
- El opuesto de –5 es 5, es decir –(–5) = 5
- El opuesto de 0 es ....

De esta manera, podemos redefinir la resta de dos números naturales como la suma de dos números enteros.

Ejemplo: Calcular:

1) *Solución*: sumar –12 es lo mismo que restar su opuesto, o sea 12, es decir: 23 + (–12) = 23 – 12 = 11

2) *Solución*: restar –20 es lo mismo que sumar su opuesto, o sea 20, por lo tanto: 9 – (–20) = 9 + 20 = 29

Actividad:
Completar:

- *La suma de dos números enteros da siempre un número... Dar dos ejemplos.*

- *La multiplicación de dos números enteros da siempre un número.............................. Dar ejemplos.*

Veamos qué ocurre con la división. Observemos lo siguiente:

ya que

ya que

En general $b \neq 0$ si se verifica que

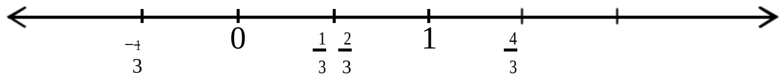
3. *NÚMEROS RACIONALES*

Para resolver esta situación habrá que introducir otro conjunto numérico, el conjunto de los ***números racionales*** al que denotaremos con la letra $\mathbb{Q}$. Un número racional es el cociente (división) de dos números enteros y , siendo $\neq$. Por lo tanto:

– , donde es el numerador y el denominador.

Notemos que $\subseteq$. ¿Por qué?

Representemos en la recta numérica algunos números racionales:



Veamos algunos ejemplos de números racionales:

- – es racional pues es el cociente de 7 y 5, que son números enteros.
- – es racional pues es el cociente de –4 y 3, que son números enteros.
- 4 es racional pues – = 4 y 4 y 1 son enteros.

Tres ejemplos más:

- 0,3 es la expresión decimal de un número racional porque 0,3 — y 3 y 10 son números enteros.
- es la expresión decimal de un número racional porque
- – y 5 y 9 son números enteros.
- es la expresión decimal de un número racional porque
- — y 14 y 90 son números enteros.

Estos tres últimos ejemplos muestran los tres tipos diferentes de expresiones decimales que puede tener un número racional:

- ***Expresión decimal finita:***
- ***Expresión decimal periódica pura:*** ;
- ***Expresión decimal periódica mixta:*** ;

Todo número racional puede escribirse como una expresión decimal cuya parte decimal puede tener un número finito de cifras o puede tener un número infinito de cifras pero periódicas, pura o mixta.

Supongamos que nos dan el número decimal . Es una expresión decimal periódica mixta, así que ya sabemos que es un número racional y por lo tanto se tiene que poder expresar como una fracción (cociente de dos enteros). ¿Qué fracción es?

Para hallar esta fracción, existe una regla muy simple que podemos resumir así:

Aplicando esta regla al ejemplo, obtenemos:

y simplificando la fracción obtenemos

Otro ejemplo:

=.

Recordemos que siempre podemos verificar si la fracción que obtuvimos es correcta realizando la división y verificando que el resultado coincide con la expresión decimal que teníamos.

Definimos el *inverso* de un número *a*≠ 0 como el número racional que multiplicado por nos da 1, es decir,

Ejemplos:

- El inverso de es pues 1
- El inverso de es pues = 1

De esta manera, redefinimos la división de dos enteros como la multiplicación de dos racionales. Además, podemos extender esta idea a la división de dos racionales, definiéndola como la multiplicación del primero por el inverso del segundo.

Ejemplos:

- es decir a "2 *dividido* 5" lo pensamos como la multiplicación de los números racionales 2 y
- 3 es decir a "3 *dividido* $\frac{1}{2}$" lo pensamos como la multiplicación entre 3 y el inverso de $\frac{1}{2}$, que es 2.

Actividad:
Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. *– – – – –*

2. *— -2–*

3. *La quinta parte de – es – – —*

4. *– — —*

- *Como vimos anteriormente, el sucesor inmediato de un número natural **n** es **n + 1**, por ejemplo el sucesor inmediato de 5 es 5 + 1 = 6. Si consideramos el conjunto de los racionales, ¿Se puede decir cuál es el sucesor inmediato de –?.*

……………………………………………………………………………………………

- *¿Se puede determinar cuántos números racionales hay entre – y 2?*

……………………………………………………………………………………………

Observemos que entre dos números racionales, *a* y *b*, *a* < *b*, existe el racional que verifica:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

Esta propiedad se expresa diciendo que el conjunto $\mathbb{Q}$ es un conjunto **denso**, en contraposición a los naturales $\mathbb{N}$ y los enteros , que son conjuntos **discretos**.

4. *Números Reales*

4.1 Números Irracionales:

¿Se puede representar a todos los números que se conocen mediante una expresión decimal finita o periódica?

Para contestar a esta pregunta, se debe pensar en un número muy conocido, el número π. ¿Cuál es el valor de π ? Una calculadora con 8 dígitos dará como valor de π al 3,141593; una calculadora con 10 dígitos dará como valor de π al 3,14159264. En algún libro de matemática se puede encontrar, por ejemplo:

$$\pi = 3,14159265358979323846.$$

¿Será π un número racional? ¿Por qué?

……………………………………………………………………………………………

A los números reales cuya expresión decimal no es finita ni periódica los llamaremos ***números irracionales***. A este conjunto lo denotaremos con **I**. Algunos ejemplos son:

-
-
-
-

Los números irracionales también tienen su ubicación en la recta numérica.

Observemos que la suma de dos números irracionales *no siempre* da un número irracional y que el producto de dos números irracionales *no siempre* da un número irracional.

Buscar ejemplos en donde se verifiquen dichas afirmaciones.

Observar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n \cdot \sqrt{2}$ (si $n \neq 0$) y son también números irracionales. Se puede generalizar que si $r \in \mathbb{Q}$ y $t \in \mathbf{I}$, $r + t$ y $r \cdot t$ (si $r \neq 0$) son números irracionales. Obviamente **I** también es un conjunto infinito de números.

El conjunto formado por los racionales y los irracionales se llama conjunto de ***números reales***, y se designa con la letra $\mathbb{R}$. Notemos que, por esta definición $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Los números reales llenan por completo la recta numérica, por eso se la llama *recta real*. Dado un origen y una unidad, a cada punto de la recta le corresponden un número real y, a cada número real, le corresponde un punto de la recta.

Resumiendo…

Naturales N
{0} ***Enteros Z***
Opuestos de los naturales

Racionales Q
Fraccionarios

Irracionales I

Reales R

Propiedades de las operaciones en el conjunto de los reales

5.1 Suma y producto

Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{R}$ cumplen ciertas propiedades. Veamos algunas de ellas:

Sean *a*, *b* y *c* números reales cualesquiera.

PROPIEDADES	DE LA SUMA	DEL PRODUCTO
Ley de cierre	$a+b\in\mathbb{R}$	$a\cdot b\in\mathbb{R}$
Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$ *	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ *
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Existencia de elemento neutro	Es el 0: $a+0=0+a=a$	Es el 1: $a\cdot 1=1\cdot a=a$
Existencia de inverso	Es el opuesto aditivo: $a+(-a)=(-a)+a=0$	Es el inverso multiplicativo: $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$ $si\ a\neq 0$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$	

* **Observación:** La propiedad asociativa nos permite prescindir del uso de paréntesis y escribir simplemente ó

Actividad:

1) *Comprobar con ejemplos las propiedades anteriormente mencionadas.*

……………………………………………………………………………………………………..

2) *Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas, mencionar las propiedades utilizadas.*

a) − *(5+4)=* − −

b) −

c) − −

d) − −

e) − *para todo real.*

f) Existe un número real para el cual −

5.2 Potenciación

Si a es un número real y n es un número natural, entonces decimos que a^n se obtiene multiplicando n veces el factor a, es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Ejemplo: $a^6 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a$

Decimos entonces que es una ***potencia*** que tiene a como ***base*** y n como ***exponente***.

Extendemos la definición para exponentes enteros definiendo, para $a \neq 0$:

Actividad:

Decir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a)

b)

c) $(8 \cdot 3)^2 = 8^2 \cdot 3^2$

d) $(2^3)^2 = 2^5$

e) $(2^3)^2 = 2^6$

f)

g) $5^4 = 4^5$

h)

i) $5^{-2} = -10$

La actividad anterior ejemplifica algunas de las siguientes propiedades de la potencia:

Sean a, b números reales distintos de 0 y sean m, n números enteros.

Propiedades de la Potencia	
Distributiva con respecto al producto	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
Distributiva con respecto a la división	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
Producto de potencias de igual base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
División de potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Potencia de potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

> **Observación:** Como se vio en el ejercicio anterior la potencia no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta.

- *¿Qué sucede si a un número negativo lo elevamos a una potencia par? ¿Cuál es el signo del resultado?*

....

- *¿Existe alguna potencia de 5 que dé como resultado un número negativo? ¿Por qué?*

....

5.3 Radicación

Para los enteros positivos ya se ha definido la *n*-ésima potencia de *b*, a saber, . Ahora vamos a utilizar la ecuación para definir la *n*-ésima raíz de *a*.

La notación de la raíz cuadrada de 49 es . Su valor es 7 porque y . Aun cuando , el símbolo se usa sólo con y no con , así que se tendrá un solo valor de . Claro que siempre es posible escribir si se desea el valor negativo . Además . Podemos observar que no tiene una raíz cuadrada real ya que para todo número real , por lo que no tiene solución en el conjunto de los números reales. En general, la **raíz cuadrada** de se define como sigue. A veces recibe el nombre de **raíz cuadrada principal de .**

> Si a es un número *real positivo,* si y sólo si y

Además, .

<u>Ejemplo</u>:

, pues (no es ni)

Actividad:

Calcular el valor de cada una de las expresiones que siguen, en caso de estar definida:

a) *d)*

b) *e)*

c)

En el caso de las raíces cúbicas se puede utilizar tanto números positivos como negativos, así como el cero. Por ejemplo,

y

Se puede decir entonces que,

> Si y son números *reales cualesquiera,* si y sólo si

En particular, .

Ejemplo:

, pues

, pues

Se puede ver que existe una diferencia básica entre las raíces cuadradas y las raíces cúbicas. Las raíces cuadradas están definidas sólo para los números reales positivos y el cero. Las raíces cúbicas están definidas para cualquier número real.

Lo mismo sucede con los enteros positivos mayores *n*: la distinción fundamental surge de si es par o impar.

- Si es un entero positivo par y yson **números reales positivos** tales que , entonces se escribe .
- Si es un entero positivo impar y yson **números reales** tales que , entonces se escribe .
- En cualquiera de los dos casos, . Además, se llama **raíz *n*-énesima de**

El símbolo se utiliza sólo para representar .

Observaciones:

- recibe el nombre de ***n*-ésima raíz principal de** para indicar que se define positivo si .
- El número es el **radicando**, $\sqrt{\ }$ es el **signo radical**, es el **índice** del radical y es la **expresión radical** o raíz *n*-ésima de

Veamos ahora las propiedades de la radicación, las cuales son análogas a las de la potenciación.

Sean números reales **<u>positivos</u>** y números naturales:

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN	
Distributiva con respecto al producto	
Distributiva con respecto a la división	
Raíz de raíz	

En particular:

Radicales Superpuestos

(Ej.)

Observaciones:

- Al igual que con la potenciación, la radicación no es distributiva con respecto a la suma ni a la resta. Proponga ejemplos que muestren que la distributividad no se cumple.

....

- ¿Qué sucede al aplicar la propiedad distributiva al siguiente radical: ?

....

5.4 *Simplificación de radicales:*

Efectuar las siguientes operaciones:

- (Rta.

  ....
- (Rta.

  ....
- (Rta.

  ....

> Observemos que, en algunos casos se puede dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número sin alterar el resultado. A esta propiedad la llamaremos ***simplificación de radicales***.

- ¿En qué casos es posibles simplificar radicales y en qué casos no?

....

5.5 *Racionalización de denominadores*

Sabemos efectuar divisiones cuando el divisor es un número racional, pero ¿qué sucede si hacemos la división de 3 en ? ¿Cómo realizaríamos dicha operación?

Podemos solucionar este inconveniente si encontramos un cociente equivalente al anterior cuyo denominador sea un número racional. Al procedimiento que nos permite hallar tal cociente equivalente se lo denomina *racionalización de denominadores*.

Veamos algunos ejemplos:

♦

♦

En ambos casos, para racionalizar una expresión del tipo con y , lo que se hizo fue multiplicar y dividir dicha expresión por De esto resulta una expresión cuyo denominador es , y así podemos simplificar índice y exponente para eliminar la raíz del denominador.

Actividad:

Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones:

a)

b)

5.6 Potencias de exponente fraccionario

Observemos las siguientes analogías:

- y
- y

Estos ejemplos nos inducen a adoptar la siguiente definición para el caso de potencias de exponente fraccionario:

donde , y $\mathbb{N}$

***Actividad**:*
Llevar a exponente fraccionario y resolver:

a) . =

b)

c) =

d)

6. Intervalos

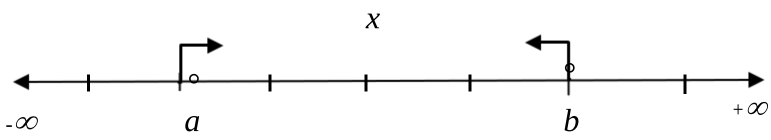
Es un subconjunto numérico definido a partir de sus extremos. Toma todos los números reales que están entre dos extremos. Geométricamente, los intervalos corresponden a segmentos de rectas graficadas en 1D es decir sobre un único eje.

Pueden ser abiertos o cerrados según tomen o no los puntos extremos (también llamados puntos de frontera), los puntos restantes se denominan puntos interiores del intervalo.

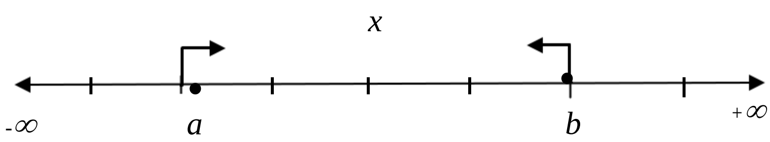
Su clasificación es entre finitos si corresponden a un segmento de recta definido, o infinitos si corresponden a semirrectas, es decir que corresponden a un segmento de recta que no incluye o incluye parcialmente a los extremos.

Notación:

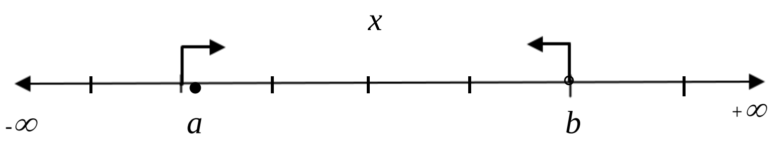
<u>Intervalo ABIERTO FINITO:</u> Corresponde a un segmento de recta que no incluye los puntos extremos del intervalo:

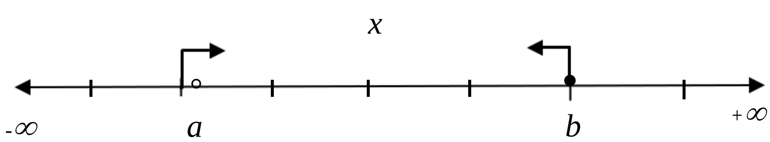


<u>Intervalo CERRADO:</u> Corresponde a un segmento de recta que incluye a los puntos extremos del intervalo:

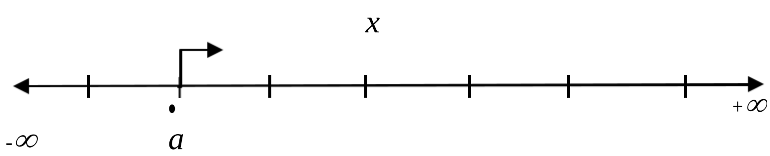


<u>Intervalo SEMI ABIERTO:</u> Corresponde a un segmento de recta que incluye a los puntos extremos del intervalo:





Intervalo INFINITO: Corresponde a un segmento de recta que incluye solo a un punto extremo (el cual puede ser inferior o superior) del intervalo:



Actividad:

Representar gráficamente los siguientes intervalos:

a)
b)
c)
d)
e)

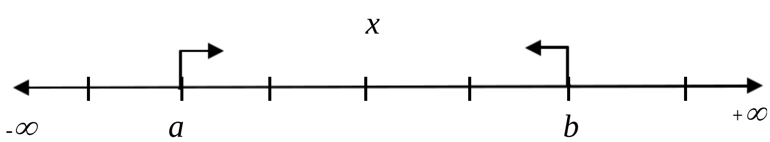
6. *Valor Absoluto o Módulo de un Número Real*

El valor absoluto de un número *x*, simbolizado por , se define del siguiente modo:

Teniendo en cuenta que denota la raíz cuadrada del número no negativo *x*, otra forma de definir el módulo de un número es:

Nota: Esta forma de expresar el módulo es útil para despejar ecuaciones cuya incógnita esta elevada a una potencia par.

Gráficamente, el módulo de un número representa la distancia al origen en la recta real, como se muestra a continuación:



Distancia entre dos números:

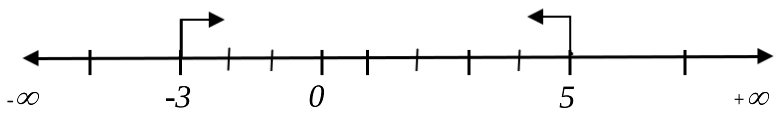
La distancia d entre dos números reales a y b es el valor absoluto de la diferencia entre a y b.

Simbólicamente:

Por ejemplo:

La distancia entre los números 5 y -3 es

Entonces: $d=8$



<u>Propiedades del Modulo</u>:

I. Si

II. El módulo de un número real es igual al módulo de su opuesto (no negativo):

III. El módulo del producto de dos números reales es igual al producto de los módulos de esos números:

IV. El módulo del cociente de dos números reales es igual al cociente de los módulos de esos números:

– —, con $b \neq 0$.

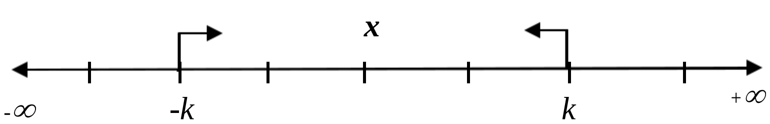
V. El módulo de la suma de dos números es igual o menor que la suma de los módulos:

VI. El módulo de la diferencia es mayor o igual que la diferencia de los módulos.

.

VII. Desigualdades, si entonces se verifica:

De la desigualdad , que dice que la distancia de x a 0 es menor que *k*, estar concluimos que *x* debe entre–*k* y *k*. lo que gráficamente se ve como:



7. Números Complejos:

7.1 Definición

Los **Números Complejos** son una extensión de los números reales, cumpliéndose que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Los números complejos tienen la capacidad de representar todas las raíces de los polinomios, cosa que con los reales no era posible.

Esto se consigue gracias a que los complejos hacen uso de una unidad imaginaria llamada número ***i***, que verifica la propiedad:

$$\mathbf{i^2 = -1}$$

Esta unidad imaginaria es de hecho la que permite definir las operaciones con esos números, puesto que para efectuarlas hay que tener presente que cada lado de esa unidad imaginaria debe trabajarse en forma independiente, no confundiendo, por decirlo de alguna forma, las peras y las manzanas.

7.2 Representación Binomial

Cada complejo se representa en forma binomial como:

$\boldsymbol{z = a + \mathrm{i}\, b}$	*a* es la parte real del número complejo *z*, y *b* es su parte imaginaria.

Esto se expresa así:

$a = \mathrm{Re}(z)$
$b = \mathrm{Im}(z)$

Las operaciones aritméticas en el conjunto de los números complejos se definen de la siguiente forma:

Igualdad

Adición

Multiplicación

Obsérvese que la definición de multiplicación es consistente con la propiedad asignada a ***i***, a saber, $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

En efecto, si se multiplica *(a +bi) . (c + di)* usando el algebra ordinaria, se obtiene *ac + i(bc + ad) + i2 (bd)*. Ahora, cuando se sustituye i^2 por *-1*, se llega a la formula de la definición.

Actividad:

Resolver las siguientes operaciones:

a. (3+6i) + (2-3*i*) =

b. (7+5i) + (1+2*i*) =

c. (5+7i) . (3-4*i*) =

d. (2-3i) + (-1+4*i*) =

También se debe considerar la división. Si se quiere expresarse 1/ (a+b*i*) como un numero complejo; el mejor modo de conseguirlo es utilizando el número **complejo conjugado** a-b*i*.

Los números complejos **a + b*i*** *y* **a – b*i*** se llaman **conjugados**.

Anexo

Símbolos y relaciones entre elementos y conjuntos

Comencemos diciendo que entendemos por conjunto. Es un concepto primario, que formalmente no se define, pero para nuestros propósitos basta decir que un conjunto es una colección de objetos. Estos objetos de la colección pueden ser cosas tales como letras, personas, números, etc. Cada uno de estos objetos se llaman elementos o miembros del conjunto. En particular estamos interesados en conjuntos cuyos elementos son números. Se suele representar a los conjuntos mediante letras imprenta mayúsculas y a sus elementos con letras imprenta minúscula.

La siguiente representación: A = {1,2,3,6} indica que el conjunto A tiene por elementos a los números 1,2,3,6. Nótese que al listar los elementos se colocan entre llaves. Es de suma importancia, tener presente que existen **relaciones fundamentales** que se señalan con símbolos específicos, para vincular un elemento con un conjunto o dos conjuntos entre sí, y las operaciones entre conjuntos.

A continuación, mediante la siguiente tabla, se pueden observar estas relaciones con su respectiva notación simbólica.

Elemento – conjunto	**Conjunto – conjunto**	**Operaciones entre conjuntos**
pertenece no pertenece	está incluido no está incluido	unión intersección

Es decir, entre un elemento y un conjunto se establece una relación de pertenencia. Dado un conjunto y sus elementos, es posible decidir si un elemento dado pertenece o no al conjunto. Asimismo, la relación de inclusión se da sólo entre conjuntos, y se puede encontrar el conjunto unión o intersección operando entre ellos. Por ejemplo:

Si el conjunto A tiene como elementos a las letras m,n,o,p, simbólicamente se escribe:

A = {m,n,o,p}

De igual manera podemos definir por extensión (nombrando todos sus elementos) los conjuntos:

B = {n,o,p}; C = {r,s,o,q}

De acuerdo a la tabla presentada anteriormente, analicemos las siguientes relaciones y operaciones e indiquemos con verdadero o falso su veracidad, justificando la respuesta.

p A **(V)** puesto que p es un elemento del conjunto A. p
B **(F)** puesto que p es un elemento del conjunto B.
p C **(F)** puesto que p no es un elemento del conjunto C. q
B **(F)** puesto que q no es un elemento del conjunto B. m B
(V) puesto que m no es un elemento del conjunto B.
p A **(F)** puesto que p es un elemento del conjunto A, y la relación de inclusión se da entre conjuntos y no entre un elemento y un conjunto.
B A **(V)** puesto que todo elemento del conjunto B pertenece al conjunto A.
A B **(F)** puesto existen elementos del conjunto A que no pertenecen al conjunto B.
B C = {n,o,p,r,s,q} **(V)** puesto que dado un elemento de este nuevo conjunto, pertenece al conjunto B **o bien,** al conjunto C.
A C = {o} **(V)** puesto que ‘o’ es un elemento del conjunto A ‘**y**’ del conjunto C.

Existen dos maneras de representar los elementos de un conjunto:

a**) Por extensión:** Se listan en forma exhaustiva todos los elementos que componen al conjunto. Por ejemplo: A = {0,1,2,3,4,5,6}

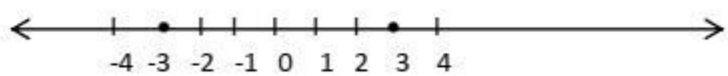
b**) Por comprensión:** Se define el conjunto indicando una propiedad o condición que cumplen los elementos del mismo. Es el caso en que no se puede dar una lista exhaustiva de los elementos del conjunto, típicamente debido a que se trata de conjuntos con infinita cantidad de elementos. Por ejemplo: B = {x/x es un número par}

Interpretación geométrica de valor absoluto

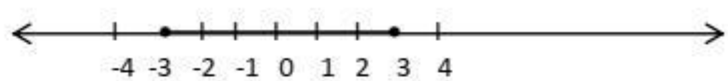
Hemos visto la representación de los distintos conjuntos numéricos sobre la recta numérica, tenemos ahora |x|. ¿Podríamos encontrar el o los puntos de la recta que lo representan?

Veamos el siguiente ejemplo:

Si |x| = 3, significa que x = 3, si x   0, pero x = -3, si x < 0.

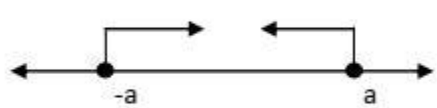


Pero si ahora escribimos |x| 3, significa que ***x* 3**, si x 0, pero ***x* -3**, si x < 0. Si representamos sobre la recta numérica, veremos que se trata **"***del conjunto de todos los números reales comprendidos entre -3 y 3"*



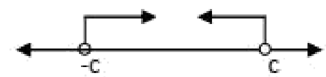
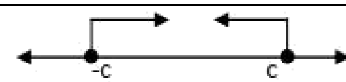
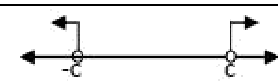
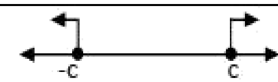
Por lo tanto, si a   IR y a > 0, entonces:

|x| a es equivalente a escribir -a   x   a



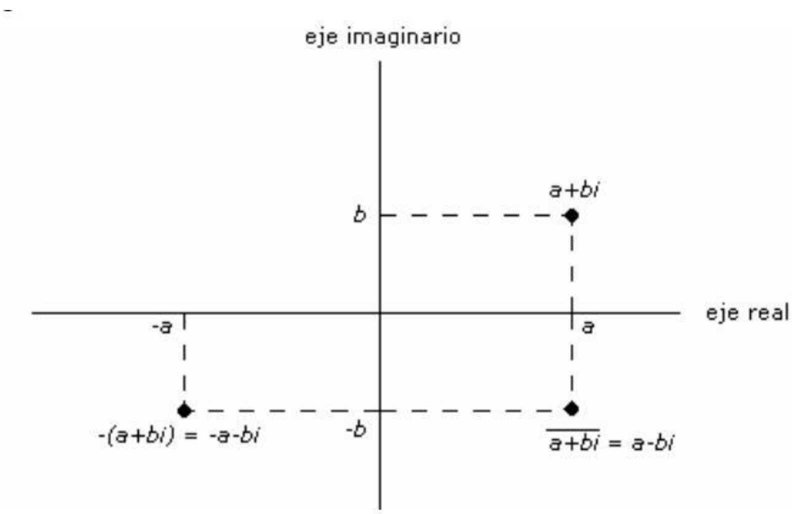
|x|a es equivalente a x   a ó x   - a

Propiedades del Valor absoluto

Valor absoluto	*Inecuación*	*Notación de intervalo*	*Representación gráfica*
$\|x\| < c$	$-c < x < c$	$(-c,c)$	
$\|x\| \leq c$	$-c \leq x \leq c$	$[-c,c]$	
$\|x\| > c$	$x < -c$ ó $x > c$	$(-\infty,-c) \cup (c,\infty)$	
$\|x\| \geq c$	$x \geq c$ o $x \leq -c$	$(-\infty,-c] \cup [c,\infty)$	

Representación gráfica de los números complejos

Los números complejos se representan en el plano. Para ello se consideran los ejes coordenados y se representan en el eje de abscisas la parte real del número complejo y en el eje de ordenadas la parte imaginaria. Así, dado el número complejo a+bi, su representación en el plano se corresponde con el punto dado por el par (a, b). Y recíprocamente, dado un punto en el plano definido por el par (a, b), este punto representa el numero complejo a+bi. Debido a la correspondencia biunívoca que se establece entre los números complejos y los puntos del plano, éste recibe el nombre de plano complejo, el eje de abscisas se llama eje real, y el eje de ordenadas, eje imaginario.



Propiedades

1. Los números complejos con parte imaginaria nula (números reales) se representan en el eje de abscisas.
2. Los números complejos con parte real nula (números imaginarios puros) se representan en el eje de ordenadas.
3. Un número complejo y su opuesto vienen representados en el plano por puntos simétricos respecto al origen.
4. Un número complejo y su conjugado vienen representados en el plano por puntos simétricos respecto al eje de abscisas.

Actividad:

Resolver las siguientes operaciones:

a. $(3+6i) + (2-3i) =$

b. $(7+5i) + (1+2i) =$

c. $(5+7i) \cdot (3-4i) =$

d. $(2-3i) + (-1+4i) =$

También se debe considerar la división. Si se quiere expresarse $1/(a+bi)$ como un numero complejo; el mejor modo de conseguirlo es utilizando el número **complejo conjugado** $a-bi$.

Los números complejos **a + b*i*** *y* **a – b*i*** se llaman **conjugados**.

Unidad 2:

Polinomios

1. *Consideraciones Generales*

1.1 Definición: Polinomio.

- Polinomio de variable real x, es toda expresión de la forma:

$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ son numeros reales y n es natural.

OBSERVACIONES:

Se puede decir que el polinomio P(x) es el medio para calcular el número f(x).

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ se denominan ***coeficientes*** del polinomio.
- el subíndice i de a_i indica que a_i es el coeficiente de x_i (i es un natural que varía entre 0 y n)

Ejemplo:

$P(x) = -8x^3 + 6x - \frac{1}{2}$ es un polinomio ordenado segun la variable x, cuyos coeficientes son:

$a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$, $a_3 = -8$, $a_4 = a_5 = ... = 0$,

1.2 Valor Numérico:

El valor numérico de un polinomio P(x) con respecto a un número real α al número que se obtiene luego de efectuar operaciones en P(x) cuando se sustituye la variable x por α. (notaremos $P(\alpha)$).

Ejemplo:

$P(x) = -3x^4 + 6x^3 - 2x^2 + x - 2$, calculemos $P(1)$ y $P(-2)$

$P(1) = -3(1)^4 + 6(1)^3 - 2(1)^2 + 1 - 2 = -3 + 6 - 2 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow P(1) = 0$

$P(-3) = -3(-2)^4 + 6(-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2) - 2 = -3.16 + 6(-8) - 2.4 - 2 - 2 = -48 - 48 - 8 - 4 = -108$

1.3 Definición: Grado de un polinomio.

El grado de $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, es el mayor i natural tal que $a_i \neq 0$

Notación: $gr\left[P(x)\right] = n, a_n \neq 0$, a_n se denomina coeficiente principal.

Ejemplo:

- $P(x) = -3x^4 + 6x^3 - 2x^2 + x - 2, \Rightarrow \text{gr}\lceil P(x) \rceil = 4$, y el coef. principal es $a_4 = -3$
- $Q(x) = 5 \Rightarrow \text{gr}\lceil Q(x) \rceil = 0$
- $T(x) = 6x + 1 \Rightarrow \text{gr}\lceil T(x) \rceil = 1$

1.4 Polinomio Nulo.

Un polinomio es nulo cuando tiene todos sus coeficientes nulos:

$$\boxed{\theta(x) \text{ es el Polinomio Nulo} \Leftrightarrow a_i = 0 \ \forall i, i \in}$$

- No existe el grado del polinomio nulo.
- El polinomio nulo admite infinitas raíces.

1.5 Clasificación de los polinomios:

- **Por el grado:** pueden ser de primero, segundo, tercero, etc. .... según el grado del término de mayor grado.
- **Por el número de términos:** de un término (monomio), de dos términos (binomio), de tres términos (trinomio), etc. ....
- **Forma usual:** indicamos el grado y el número de

  términos. *Otra forma de clasificarlos es:*

- *Completos:* cuando poseen todos los términos que corresponden a su grado.
- *Incompletos:* cuando falta algún término de los que le corresponden por su grado.

Así pues y de forma usual, para el siguiente ejemplo, diríamos, polinomio incompleto, de cuarto grado y tres términos, o simplemente, polinomio de cuarto grado incompleto; por ejemplo: $\frac{3}{4}x^4 - 5x + 2$

Importante:

Cuando trabajemos con polinomios, lo primero que hay que hacer es ordenarlos en sentido decreciente, luego reducir términos semejantes, y por último, aunque no siempre es necesario, completarlos con ceros, en el caso de que no sean completos.

<u>*Ordenación*</u>:

Consiste en colocar los términos unos a continuación de otros guardando el orden del grado del mismo.

Reducción de términos semejantes:

Consiste en sumar o restar todos los términos semejantes que se encuentren en la expresión.

Complitud:

Consiste en intercalar términos con coeficiente nulo allí donde falte el término del grado que corresponda.

Ejemplo 1:

$P_5(x) = 2x^2 - 5x^4 + x + 3x + 1 + x^5 - 3x^3 - 3$

Polinomio desordenado, con términos semejantes.

$= x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 3x + 1 - 3$

$= x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 2$

Es un polinomio de quinto grado completo.

Ejemplo 2:

$P_5(x) = \frac{3}{2}x^5 - 2x + 3x^3$ Polinomio de quinto grado incompleto.

$= \frac{3}{2}x^5 + 3x^3 - 2x$ No hay términos semejantes que reducir.

$= \frac{3}{2}x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 - 2x + 0$ ya que por ser de quinto grado ha de tener seis términos, le faltaban tres términos que hemos completado con ceros.

Actividades:

En los siguientes casos reduce términos semejantes, ordena y completa con ceros.

a) $P(x) = 3x^2 - 4x^5 + 3x^4 - x^3 - 3 - x$ *b)* $Q(x) = 6x^5 - 2x + 3x^3 - 12 - 5x^4$

c) $T(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x^4 + 6x - 7 + x^2 - 5x - 4 - 5x + 2 + 7x^2$

1.6 Número de términos de un polinomio:

Un polinomio se dice que es completo cuando tiene todos los términos que le corresponden, pero, ¿Cuántos términos le corresponden a cada polinomio?

El número de términos que debe tener un polinomio es igual al grado más uno. Así:

Primer grado $\Rightarrow$ dos términos $a_1x + a_0$.

Segundo grado $\Rightarrow$ tres términos $a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Tercer grado $\Rightarrow$ cuatro términos $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

1.7 Operaciones con Polinomios:

1.7.1 Suma de Polinomios:

Sean $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$,
La suma de P (x) y $Q(x)$ es $S(x) = \sum_{i=0}^{i=m} (a_i + b_i) x^i$ siendo $m = \max\{n, k\}$

S(x) por su forma es un polinomio cuyos coeficientes son los reales $(a_i + b_i)$. Esto significa que cada coeficiente del polinomio S(x) se obtiene sumando los coeficientes de los términos semejantes, es decir, los términos de igual grado.

Definición: *Polinomios opuestos.*

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, el polinomio opuesto de P(x) es $Q(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - ... - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$.

Notación: el polinomio opuesto de P(x) lo notaremos –P(x).

1.7.2 Diferencia de Polinomios:

Dados los polinomios P(x) y Q(x), $D(x) = P(x) - Q(x) \Leftrightarrow D(x) + Q(x) = P(x)$. Al polinomio D(x) lo llamamos diferencia entre P(x) y Q(x) y – es la sustracción entre polinomios.

1.7.3 Producto de Polinomios:

Dados los polinomios $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y $B(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$,

el producto A(x).B(x) es $P(x) = \sum_{i=0}^{i=n+p} c_i x_i$, donde los coeficientes $c_i = \sum_{j=0}^{j=i} a_{i-j} . b_j$.

Algunas consecuencias:

1) La multiplicacion de polinomios es un unico polinomio.

2) $\left.\begin{array}{l} gr\left[A(x)\right] = m \\ gr\left[B(x)\right] = n \end{array}\right\} \Rightarrow gr\left[A(x).B(x)\right] = m + n$

3) $P(x).\theta(x) = \theta(x)$ y $P(x).1 = P(x)$

2. Divisibilidad. Teorema del Resto

2.1 División

Para dividir polinomios el grado del polinomio divisor ha de ser igual o menor que el del polinomio dividendo.

El cociente de dos polinomios es otro polinomio que tiene por grado final la diferencia de los grados del dividendo menos el del divisor. El resto es también un polinomio cuyo grado ha de ser menor que el del divisor, y se cumple siempre la máxima:

Cuando hagamos divisiones, siempre ordenar (en sentido decreciente) y completar con ceros, tanto el polinomio dividendo como el divisor.

Ejemplos de divisiones:

$$
\begin{array}{llll|l}
2x^3 & -3x^2 & -5x & -5 & x^2+x \\ \cline{5-5}
-2x^3 & -2x^2 & \downarrow & \downarrow & 2x-5 \rightarrow \textit{Cociente} \\ \cline{1-2}
0x^3 & -5x^2 & -5x & \downarrow & \\
 & 5x^2 & +5x & \downarrow & \\ \cline{2-3}
 & 0x^2 & +0x & -5 \rightarrow \text{Resto de la división.} &
\end{array}
$$

Se procede igual que si se tratara de números.

Así lo primero es buscar un número que multiplicado por el coeficiente del término de mayor grado del divisor, iguale éste con el del dividendo.

Luego una variable elevada a un exponente adecuado para que iguale el del dividendo.

Se multiplica todo el divisor por dicho monomio y el resultado se lleva restando bajo los términos correspondientes del dividendo. Se suman y se baja el siguiente término del dividendo. Así hasta que el grado del polinomio, resultante de alguna de las operaciones intermedias, sea menor que el grado del divisor. Éste será el resto de la división.

Finalmente se comprueba que:

En nuestro caso:

$$2x^3-3x^2-5x-5=\left(x^2+x\right)\cdot\left(2x-5\right)+(-5)=2x^3-5x^2+2x^2-5x-5=$$
$$=2x^3-3x^2-5x-5\text{ , c.q.d.}$$

Ejemplos:

E1.- Polinomio por monomio:

$$\begin{cases} \textit{Dividendo}: 3x^4-5x^3+4x^2 \\ \textit{Divisor}: x^2 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{llll|l}
3x^4 & -5x^3 & +4x^2 & & x^2 \\ \cline{5-5}
-3x^4 & \downarrow & \downarrow & & 3x^2-5x+4 \quad \rightarrow \textit{Cociente} \\ \cline{1-1}
0x^4 & -5x^3 & \downarrow & & \\
 & 5x^3 & \downarrow & & \\ \cline{2-2}
 & 0x^3 & +4x^2 & & \\
 & & -4x^2 & & \\ \cline{3-3}
 & & 0x^2 & \rightarrow \text{Re}\,\textit{sto} \Rightarrow \textit{es exacta}. &
\end{array}
$$

Comprobamos:

$$3x^4 - 5x^3 + 4x^2 = x^2 \cdot \left(3x^2 - 5x + 4\right) + 0 = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 \text{ c.q.d.}$$

En estos casos lo que hacemos no es más que aplicar el proceso de simplificación de fracciones, ya que:

$$\left(3x^4 - 5x^3 + 4x^2\right) \div \left(x^2\right) = \frac{3x^4 - 5x^3 + 4x^2}{x^2} = \frac{3x^4}{x^2} - \frac{5x^3}{x^2} + \frac{4x^2}{x^2}$$

Simplificando: $\dfrac{3x^{\cancel{4}2}}{\cancel{x^2}} - \dfrac{5x^{\cancel{3}1}}{\cancel{x^2}} + \dfrac{4x^{\cancel{2}}}{\cancel{x^2}} = 3x^2 - 5x + 4$

Conclusión: *dividir un polinomio por un monomio no es más que simplificar la fracción algebraica correspondiente.*

E2.- Polinomios entre sí:

$$\begin{cases} \text{Dividendo: } x^6 - 3x - x^3 - 3 \\ \text{Divisor: } -3 + x^2 \end{cases}$$

Lo primero ordenar y completar:

$$\left(x^6 + 0x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x - 3\right) \div \left(x^2 + 0x - 3\right)$$

$$\begin{array}{l|l}
x^6 + 0x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 - 3x - 3 & x^2 + 0x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^6 - 0x^5 + 3x^4} \quad \downarrow\downarrow \quad \downarrow & \downarrow x^4 + 3x^2 - x + 9 \rightarrow \text{Cociente.} \\
0x^6 + 0x^5 + 3x^4 \;\; - x^3 + 0x^2 \quad \downarrow\;\downarrow & \\
\qquad \underline{-3x^4 + 0x^3 + 9x^2} \quad \downarrow\;\downarrow & \\
\qquad 0x^4 - x^3 + 9x^2 \;\; - 3x \quad \downarrow & \\
\qquad\qquad \underline{x^3 + 0x^2 - 3x} \quad \downarrow & \\
\qquad\qquad 0x^3 + 9x^2 - 6x - 3 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-9x^2 + 0x + 27} & \\
\qquad\qquad\quad 0x^2 - 6x + 24 \rightarrow \text{Resto.} &
\end{array}$$

Comprobación: $\left(x^2 - 3\right) \cdot \left(x^4 + 3x^2 - x + 9\right) + \left(-6x + 24\right) =$

$$= x^6 + 3x^4 - x^3 + 9x^2 - 3x^4 - 9x^2 + 3x - 27 - 6x + 24 =$$

$$= x^6 + (3 - 3)x^4 - x^3 + (9 - 9)x^2 + (3 - 6)x + (-27 + 24) =$$

$$= x^6 - x^3 - 3x - 3 \text{ c.q.d.}$$

Conclusión: *es fundamental ordenar (en sentido decreciente) y completar los polinomios, dividendo y divisor, antes de hacer la división. Además, fíjate en que el número de términos a dividir en cada paso ha de ser igual al número de términos del divisor, luego el paso de bajar términos no es necesariamente término a término. Como puedes ver, en el segundo paso hemos bajado dos términos simultáneamente*.

2.2 *Teorema del resto.* (Valor numérico de un polinomio)

El resto de dividir un polinomio, P(x), por un binomio de la forma $(x \pm a)$, es igual al valor numérico que toma el polinomio al sustituir x por a .

En el ejemplo anterior:

$P(x) = 3x^4 - 8x^2 + 5x - 1 \Rightarrow P(2) = 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 48 - 32 + 10 - 1 = 25$

2.2 Regla de Ruffini

Cuando el divisor sea un binomio, podemos aplicar una regla muy sencilla que consiste en lo siguiente. Sea el polinomio divisor $(x - 2)$, y el polinomio dividendo $3x^4 - 8x^2 + 5x - 1$, para hacer la división por la regla de Ruffini, hay que realizar los siguientes pasos:

Ordenar (en sentido decreciente) y completar con ceros el dividendo: $3x^4 + 0x^3 - 8x^2 + 5x - 1$

Se escriben en hilera los coeficientes del polinomio dividendo, en el mismo orden en que se encuentran en el polinomio.

$3 \quad 0 \quad -85 \qquad -1$

En el extremo izquierdo, y en segunda hilera, se escribe el opuesto del término independiente del polinomio divisor.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

A la siguiente hilera se baja el primer coeficiente del dividendo, tal como está.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

Se multiplica éste por el opuesto del término independiente del divisor y el resultado se sitúa debajo del segundo coeficiente del dividendo, y se suman. El resultado de la suma se sitúa en la última hilera a la derecha del primer coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & 6 & & & \\ \hline & 36 & & & & \end{array}$$

Se multiplica, de nuevo, ése resultado por el opuesto del término independiente del divisor, y el resultado se sitúa debajo del tercer coeficiente del dividendo, y se suman.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -8 & 5 & -1 \\ 2 & & 6 & 12 & 8 & 26 \\ \hline & 3 & 6 & 4 & 13 & 25 \end{array}$$

El resultado de la suma se sitúa en la última hilera a la derecha del resultado anterior, y así sucesivamente hasta completar todos los términos del polinomio.

El último valor de la última fila es el resto de la división, en este caso es 25, y los números anteriores de la última fila son los coeficientes del polinomio cociente ordenados en sentido decreciente, así:

- Cociente: $3x^3 + 6x^2 + 4x + 13$ y resto: 25.
- Comprobación: $3x^4 - 8x^2 + 5x - 1 = (x - 2) \cdot \left(3x^3 + 6x^2 + 4x + 13\right) + 25 =$

$= 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 13x - 6x^3 - 12x^2 - 8x - 26 + 25 = 3x^4 - 8x^2 + 5x - 1$

Actividades:

Realiza las siguientes divisiones por distintos método:

a) $\left(x^3 - 5x^2 + 6x - 3\right) \div (x - 2)$

b) $\left(x^4 - 3x^2 + 7\right) \div (x - 3)$

c) $\left(3x^5 - 4x^3 + 6x - 8\right) \div (x + 1)$

d) $\left(x + \frac{3}{2}x^4 + 2x^5 - \frac{13}{4}x^3\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

3. Transformaciones de un polinomio en un producto

Factorizar un polinomio P significa transformarlo en el producto de una constante por uno o más polinomios primos de coeficiente principal igual a uno. Veremos a continuación algunos casos sencillos de factorización:

I. *Extracción de factor común*:

I.1) *A.M+B.M=M.(A+B)*

Ejs. $4x - 20 = 4.(x - 5)$

$2x^3 - 8x^2 + 16x = 2x(x^2 - 4x + 8)$

I.2) *A.P.+B.P.+A.Q.+B.Q.=P.(A+B)+Q.(A+B)=(A+B).(P+Q)*

Ej. $6xy + 15y - 8x^2 - 20x = 3y(2x + 5) - 4x(2x + 5)$

II. *Diferencia de cuadrados*:

$$x^2 - y^2 = (x - y).(x + y)$$

Ej. $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

III. *Trinomio cuadrado perfecto:*

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Ej. $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\,3\,x + 3^2 = (x + 3)^2$

IV. *Cuatrinomio cubo prefecto*:

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$$

V. *Divisibilidad de la suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de las bases*:

Se puede verificar fácilmente si se analiza:

1) $x^n + a^n$ es divisible por $(x + a)$ si *n* es Impar.
2) $x^n + a^n$ nunca es divisible por $(x - a)$.
3) $x^n - a^n$ es divisible por $(x + a)$ si *n* es Par.
4) $x^n - a^n$ siempre es divisible por $(x + a)$.

4. Raíz de un Polinomio.

Definición: Raíz de P(x).

$$\boxed{\alpha \text{ es raiz de } P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0}$$

4.1 Raíces particulares de un polinomio.

- 0 Es raíz de un polinomio si y sólo si el término independiente es cero.
- 1 Es raíz de un polinomio sí y sólo si la suma de los coeficientes es cero.
- -1 Es raíz de un polinomio sí y sólo si la suma de los coeficientes de los términos de grado par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de grado impar.

4.2 Raíces comunes:

Definición: Combinación lineal de polinomios:

Sean P(x) y Q(x) polinomios, a y b números reales cualesquiera. Al polinomio L(x) = a.P(x) + b.Q(x) le llamamos *combinación lineal* de P(x) y Q(x). Observaciones:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} \alpha \text{ es raiz de } P(x) \\ \alpha \text{ es raiz de } Q(x) \\ L(x) = a.P(x) + b.Q(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \text{ es raiz de } L(x).$$

Es decir, si α es raiz de dos polinomios, α es raiz de cualquier combinacion lineal entre ellos.

4.3 Relaciones entre coeficientes y raíces.

- <u>*POLINOMIO DE PRIMER GRADO*</u>:

$$Sea \quad P(x) = a_1 x + a_0,\ a_1 \neq 0 \ y\ \alpha \text{ raiz de } P(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} Por\ D.F. \Rightarrow P(x) = a_1(x - \alpha) = a_1 x - a_1\alpha \\ P(x) = a_1 x + a_0 \end{array}\right\} \underset{polinomios}{\overset{id.de}{\Rightarrow}} -a_1\alpha = a_0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{a_0}{a_1}}$$

- <u>*POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO*</u>:

$$Sea \quad P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_2 \neq 0,\ \alpha\ y\ \beta \text{ raices de } P(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} Por\ D.F. \Rightarrow P(x) = a_2(x-\alpha)(x-\beta) = a_2 x^2 - a_2(\alpha+\beta)x + a_2\alpha\beta \\ P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{array}\right\} \underset{polinomios}{\overset{id.de}{\Rightarrow}} \left\{\begin{array}{l} -a_2(\alpha+\beta) = a_1 \Rightarrow \alpha+\beta = -\frac{a_1}{a_2} \\ a_2\alpha\beta = a_0 \Rightarrow \alpha.\beta = \frac{a_0}{a_2} \end{array}\right.$$

- *POLINOMIO DE TERCER GRADO*:

Sea $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $a_3\neq 0$, α, β y γ raices de $P(x)$.

Utilizando un razonamiento analogo tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{a_2}{a_3} \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\dfrac{a_1}{a_3} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{a_0}{a_3} \end{array}}$$

Casos que se reducen a ecuaciones de segundo grado.

Polinomios Ciclotónicos.

Son de la forma: $P(x)=ax^{2n}+bx^n+c$, $a\neq 0, n\in \mathbb{N}^*$

Ejemplo: Si $n=1$: $P_1(x)=ax^2+bx+c$

Si $n=2$: $P_2(x)=ax^4+bx^2+c$ (polinomio bicuadrado)

Si $n=3$: $P_3(x)=ax^6+bx^3+c$ (polinomio bicubico)

Para hallar las posibles raices reales de cualquier polinomio ciclotonico, debemos resolver la ecuacion: $ax^{2n}+bx^n+c=0$ (1), que podemos escribir asi: $a\left(x^n\right)^2+bx^n+c=0$,

Si sustituimos: $\boxed{x^n=z}\rightarrow az^2+bz+c=0$ (2). Aplicamos un cambio de variable; esta transformacion es ventajosa pues llevamos la ecuacion (1) que no sabiamos resolver, a la ecuacion (2) de resolucion conocida.

Polinomios Simétricos.

Un polinomio es simétrico si y sólo si los coeficientes de los términos “equidistantes” de los extremos, son iguales:

Por ejemplo, un polinomio simetrico de:

grado 5 es: $A(x)=ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$

grado 4 es: $B(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$

Observaciones:

No admiten la raíz 0.

-1 es raíz, si el grado es impar.

Si admite raíz α, también la raíz 1/α.

Si es de grado impar, al dividirlo por (x+1), obtenemos un polinomio simétrico.

Raíces de polinomios simétricos de 4º grado.

Para hallar las posibles reales de un polinomio simetrico de 4º grado: $S(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$, resolvemos la ecuacion: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (1). Transformemos (1) en una ecuacion que nos permita saber cual es el cambio de variable conveniente.

Como (1) no admite raiz 0, tenemos que: $x^2\left(ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2}\right) = 0$, por lo tanto, $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow$

$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$ (2). Si en esta ultima expresion, efectuamos el cambio de variable: $\boxed{x + \frac{1}{x} = z}$,

nos queda $z^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, entonces realizando la sustituyendo en (2) obtenemos: $a\left(z^2 - 2\right) + bz + c = 0$, que ordenando segun z: $\boxed{az^2 + bz + c - 2a = 0}$ (3). Esta ecuacion admite, a lo sumo, dos raices reales distintas: z_1 y z_2.

Entonces, "deshaciendo" el cambio de variable efectuado: $x + \frac{1}{x} = z_1 \Rightarrow x^2 + 1 = z_1 x \Leftrightarrow x^2 - z_1 x + 1 = 0$ (4)

y $x + \frac{1}{x} = z_2 \Rightarrow x^2 + 1 = z_2 x \Leftrightarrow x^2 - z_2 x + 1 = 0$ (5).

Cada una de las ecuaciones (4) y (5) admiten, a lo sumo dos raíces reales distintas, que son las raíces de la ecuación (1).
Por lo tanto:

$$\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \xleftrightarrow[x + \frac{1}{x} = z]{\text{CambiodeVariable}} az^2 + bz + (c - 2a) = 0}$$

Polinomios Hemisimétricos:

Un polinomio es hemisimétrico si y solo si, los coeficientes de los términos "equidistantes" de los extremos son opuestos.
Observaciones:

1) No admiten la raíz 0.
2) 1 es raíz, si el grado es impar.
3) Si admite la raíz α, también admite la raíz $1/\alpha$.
4) Si el grado es impar, al dividirlo por (x-1) obtenemos un polinomio simétrico.

5. *Expresiones algebraicas fraccionarias: Operaciones.*

Llamaremos *expresiones algebraicas racionales* a las de la forma $\frac{A(x)}{B(x)}$ donde $A(x)$ y $B(x)$ son polinomios de variable x, y $B(x) \neq 0$.

Por ejemplo, $\frac{7}{x-2}$ es una expresión algebraica racional porque el numerador $A(x) = 7$ es un polinomio y el denominador $B(x) = x - 2$ también es un polinomio.

También es una expresión algebraica racional $\frac{x^3 - 2x + \sqrt{3}}{x^2 + 7x}$.

¿Es $\frac{x^5 + 3x^3}{\sqrt{x} - 3}$ una expresión algebraica racional?

....

La expresión $x^2 - 9$ es también racional porque $x^2 - 9$ es un polinomio y 1, su denominador, también lo es.

5.1 *Simplificación de expresiones racionales*

Recordamos que, dado el racional $\frac{2}{3}$ podemos hallar otros equivalentes con él: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{14}{21} = \ldots$

donde $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ con $n \neq 0$.

Análogamente para la expresión racional $\frac{A(x)}{B(x)}$ pueden hallarse expresiones racionales ***equivalentes***: $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x) \cdot N(x)}{B(x) \cdot N(x)}$ siendo N(x) cualquier polinomio no nulo.

En Z muchas veces se nos presenta el problema de encontrar la fracción equivalente más simple que una dada. Por ejemplo, $\frac{77}{132} = \frac{7 \cdot \text{[redacted]}}{2^2 \cdot 3 \cdot \cancel{11}} = \frac{7}{12}$

También es posible simplificar expresiones algebraicas racionales *cuando existen factores comunes al numerador y al denominador*, de lo contrario la expresión racional es *irreducible.*

Consideremos $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$. Factorizamos su numerador y su denominador:

$x^2 - 1 = (x + 1)\,(x - 1)$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2\,(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x^2 - 1) = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$

Entonces $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{\cancel{(x+1)}\,\cancel{(x-1)}}{(x+3)\,\cancel{(x+1)}\,\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x+3}$ **si $x \neq 1$ y $x \neq -1$**

Las dos expresiones racionales, $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$ *y* $\frac{1}{x+3}$ *son* ***equivalentes*** *para* ***$x \neq 1$ y $x \neq -1$.***

La expresión final es equivalente a la dada para todo valor de x que no anule el factor cancelado porque ello equivaldría a dividir por cero.

Veamos otros ejemplos:

I) $$\frac{3x^3-12x}{x^2-4x+4}=\frac{3x\,(x^2-4)}{(x-2)^2}=\frac{3x\,\cancel{(x+2)}\,(x-2)}{\cancel{(x-2)}\,(x-2)}=\frac{3x\,(x+2)}{x-2}\quad \text{si } x\neq 2$$

II) $$\frac{x^2+5}{x^4-25}=\frac{x^2+5}{(x^2+5)\,(x^2-5)}=\frac{1}{x^2-5}\quad \forall\, x\in R$$

¿Por qué esta igualdad es válida para cualquier número real?

....

Actividad:
Simplificar, indicando para qué valores de x la expresión resultante es equivalente a la dada.

a) $\frac{2x-6}{x^2-6x+9}$ *b)* $\frac{x^2+x}{x+1}$ *c)* $\frac{x^3-49x}{x^3-14x^2+49x}$ *d)* $\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$

5.2 Operaciones con Expresiones Algebraicas Racionales

Para operar con expresiones racionales, aplicamos las mismas propiedades y técnicas que para operar con fracciones numéricas.

5.2.1 Adición y Sustracción

Recordamos que para sumar $\frac{3}{14}+\frac{1}{21}$ necesitamos hallar fracciones equivalentes a los sumandos, de igual denominador: $\frac{3}{14}+\frac{1}{21}=\frac{3}{2\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 7}=\frac{3\cdot 3+1\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 7}=\frac{11}{42}$.

Para sumar (o restar) expresiones racionales de distinto denominador, debemos sumar (o restar) expresiones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador. Para hallarlo, factorizamos los denominadores y luego multiplicamos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente con el que figura (mínimo común múltiplo).

Veamos el siguiente ejemplo: $$\frac{2}{3x^2-6x+3}+\frac{x}{x^2+3x-4}=$$

Factorizamos los denominadores:

$$=\frac{2}{3(x^2-2x+1)}+\frac{x}{(x-1)\,(x+4)}=\frac{2}{3(x-1)^2}+\frac{x}{(x-1)\,(x+4)}=$$

Buscamos expresiones equivalentes

con igual denominador: $$=\frac{2\,(x+4)}{3\,(x-1)^2\,(x+4)}+\frac{x\cdot 3\,(x-1)}{3\,(x-1)^2\,(x+4)}=$$

Operamos en el numerador y sumamos: $$=\frac{2x+8+3x^2-3x}{3\,(x-1)^2\,(x+4)}=\frac{3x^2-x+8}{3\,(x-1)^2\,(x+4)}$$

El numerador no tiene raíces reales, por lo tanto la expresión obtenida es irreducible.

Vamos a calcular $\dfrac{x-10}{x^2+3x-10}-\dfrac{2x+4}{x^2-4}=$

Factorizamos los denominadores: $=\dfrac{x-10}{(x-2)\,(x+5)}-\dfrac{2x+4}{(x+2)\,(x-2)}=$

Elegimos un denominador común y hallamos las expresiones equivalentes:

$$=\frac{(x-10)\,(x+2)}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}-\frac{(2x+4)\,(x+5)}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}=$$

Aplicamos propiedades y restamos: $=\dfrac{x^2+2x-10x-20}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}-\dfrac{2x^2+10x+4x+20}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}=$

$$=\frac{x^2-8x-20-2x^2-14x-20}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}=\frac{-x^2-22x-40}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}=\frac{-(x+20)\,(x+2)}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}=\frac{-(x+20)}{(x-2)\,(x+5)}$$

La suma de expresiones algebraicas racionales es asociativa, conmutativa, cumple la ley de cierre y posee elemento neutro: 0. Recordemos que restar es sumar el opuesto.

Actividad:

Calcular:

a) $\dfrac{2}{x^2-9}+\dfrac{x+1}{x^2+6x+9}-\dfrac{1}{3-x}=$

b) $\dfrac{x+5}{x^2-25}+\dfrac{x+2}{2x^2-6x-20}-\dfrac{21}{2x+2}=$

c) $\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=$

5.2.2 Multiplicación

Para multiplicar dos expresiones racionales $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ y $\dfrac{C(x)}{D(x)}$, procedemos así:

$$\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot C(x)}{B(x)\cdot D(x)}$$

Por ejemplo:

I) $\dfrac{2x+1}{x-3}\cdot\dfrac{3x}{x+1}=\dfrac{(2x+1)\,3x}{(x-3)\,(x+1)}=\dfrac{6x^2+3x}{x^2-2x-3}$

II) Calculamos ahora $\dfrac{-x^2+4x}{x^2-9}\cdot\dfrac{5x+15}{x^3-4x^2}=\dfrac{(-x^2+4x)\,(5x+15)}{(x^2-9)\,(x^3-4x^2)}=$

Factorizamos cada uno de los polinomios: $=\dfrac{-x\,(x-4)\,5\,(x+3)}{(x+3)\,(x-3)\,x^2\,(x-4)}=$

Simplificamos y obtenemos el resultado: $=\dfrac{-5}{x\,(x-3)}$ si $x\neq 4$ y $x\neq -3$.

La multiplicación de expresiones algebraicas racionales cumple con la ley de cierre, es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro (1) y es distributiva respecto de la suma y la resta.

¿Existe inverso multiplicativo para toda expresión $\frac{A(x)}{B(x)}$?

....

Actividad:

Resolver: *a)* $\frac{x^2-4x+4}{2x}\cdot\frac{6x-12}{x^3-6x^2+12x-8}$

b) $(x^3+1)\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}\cdot\frac{1}{x^2+2x+1}$

5.2.3 División

Se llama inverso multiplicativo de una expresión algebraica racional $\frac{A(x)}{B(x)}$ a la expresión $\frac{B(x)}{A(x)}$, si A es no nulo.

Para dividir dos expresiones algebraicas racionales $\frac{A(x)}{B(x)}$ y $\frac{C(x)}{D(x)}$ operamos igual que en el conjunto Q: $\frac{A(x)}{B(x)}:\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{D(x)}{C(x)}=\frac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot C(x)}$ con $C(x)\neq 0$

Por ejemplo: $\frac{x-1}{3-x}:\frac{2x}{x+2}=\frac{(x-1)\,(x+2)}{(3-x)\,2x}=\frac{x^2+x-2}{6x-2x^2}$

Actividad:

1) Con las expresiones $P(x)=\frac{2x+4}{x^2-9}$ *y* $T(x)=\frac{x+3}{x^2-x-6}$ *calcular:*

a) P(x). T(x) *b) P(x): T(x)* *c) T(x): P(x).*

2) Resolver: *a)* $\frac{x^2-4}{x^2-9}:\frac{x^4-16}{x+3}$ *b)* $\frac{5x+10}{x^2-1}:\frac{3x+6}{x+1}$

c) $\left(\frac{x+4}{x^2-1}\cdot\frac{-x+1}{x^2+1}\right):\frac{-x^2-3x+4}{x^4-1}$

Actividad:

Efectuar los siguientes ejercicios combinados:

a) $\left(\frac{x-2}{x^2+4}+\frac{x+2}{x^2-x-6}\right)\cdot\frac{x^2-9}{4x-10}$ *b)* $\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\right):\frac{4}{x^2-4}$

c) $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}:\frac{4}{x^2-4}$

6. Logaritmo

"Sea *a* un número real positivo distinto de 1; si *b* es otro número real positivo, llamaremos logaritmo en base a de b al único numero x que verifica a $a^x = b$". Es decir:

$\Leftrightarrow a^x = b$ $\quad \forall a > 0, a \neq 1$

$\log_a b = x$ **$b > 0$**

Por ejemplo:

$\log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$

$\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$

$\log_{14} 1 = 0 \quad 14^0 = 1$

$\log_5 (1/25) = -2 \Leftrightarrow 5^{-2} = (1/5)^2 = 1/25$

6.1 Propiedades de los logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, podemos escribir las siguientes propiedades, que son consecuencia inmediata de las leyes de potenciación:

Si $a > 0, a \neq 1 \quad b > 0$

El logaritmo de 1 en cualquier base es 0.

$\Leftrightarrow$ Ej. $\Leftrightarrow$

El logaritmo de la base en la misma base es 1.

$\Leftrightarrow$ Ej. $\Leftrightarrow$

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Ej.

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor.

Ej.

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

Ej.

6.2 Cambio de base de los logaritmos

Ejemplos:

NOTA:

La definición de logaritmo es válida para toda base real positiva arbitraria (diferente de 1), pero las bases más utilizadas en los cálculos de nuestro interés son 10 (logaritmo decimal) y e (logaritmo natural o Neperiano, donde *e* es igual a 2,718...). A veces se escribe log para representar $\log_{10}$ y ln para $\log_{e}$ (por ejemplo en las calculadoras); dicha nomenclatura será también adoptada en este curso.

Anexo Unidad 2: Polinomios

La mayor parte de nuestro trabajo a la hora de graficar funciones se ocupará de factorizar polinomios y, para factorizar, necesitamos saber cómo dividir polinomios.

División de polinomios
La división de polinomios es muy semejante al conocido proceso de dividir números. Cuando dividimos 38 entre 7, el cociente es 5 y el residuo es 3. Escribimos

$$\frac{\overbrace{38}^{\text{Dividendo}}}{\underbrace{7}_{\text{Divisor}}} = \underbrace{5}_{\text{Cociente}} + \frac{\overbrace{3}^{\text{Residuo}}}{7}$$

Para dividir polinomios:

> Si $P(x)$ y $D(x)$ son funciones polinomiales, con $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomiales únicas $Q(x)$ y $R(x)$, donde $R(x)$ es 0 o de grado menor al grado de $D(x)$, de modo que
>
> $$\underbrace{P(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{D(x)}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{Q(x)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Residuo}}$$
>
> Las funciones polinomiales $P(x)$ y $D(x)$ se denominan **dividendo** y **divisor**, respectivamente, $Q(x)$ es el **cociente**, y $R(x)$ es el **residuo**.

EJEMPLO 1 | División larga de polinomios

Divida $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$.

SOLUCIÓN El *dividendo* es $6x^2 - 26x + 12$ y el *divisor* es $x - 4$. Empezamos por acomodarlos como sigue:

$$x - 4\overline{)6x^2 - 26x + 12}$$

A continuación dividimos el término principal del dividendo entre el término principal del divisor para obtener el primer término del cociente: $6x^2/x = 6x$. En seguida multiplicamos el divisor por $6x$ y restamos el resultado del dividendo

$$\begin{array}{rl} 6x & \text{Divida términos principales: } \dfrac{6x^2}{x} = 6x \\ x - 4\overline{)6x^2 - 26x + 12} & \\ \underline{6x^2 - 24x} & \text{Multiplique: } 6x(x - 4) = 6x^2 - 24x \\ -2x + 12 & \text{Reste y “baje” 12} \end{array}$$

Repetimos el proceso usando el último renglón $-2x + 12$ como dividendo.

$$\begin{array}{rl} 6x^2 - 2 & \text{Divida términos principales: } \dfrac{-2x}{x} = -2 \\ x - 4\overline{)6x^2 - 26x + 12} & \\ \underline{6x^2 - 24x} & \\ -2x + 12 & \\ \underline{-2x + 8} & \text{Multiplique: } -2(x - 4) = -2x + 8 \\ 4 & \text{Reste} \end{array}$$

El proceso de división termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor. El último renglón que contenga el residuo, y el renglón superior contienen el cociente. El resultado de la división puede interpretarse en cualquiera de dos formas.

$$\frac{\overbrace{6x^2 - 26x + 12}^{\text{Dividendo}}}{\underbrace{x - 4}_{\text{Divisor}}} = \overbrace{6x - 2}^{\text{Cociente}} + \frac{\overbrace{4}^{\text{Residuo}}}{x - 4}$$

o

$$\underbrace{6x^2 - 26x + 12}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x - 4)}_{\text{Divisor}}\underbrace{(6x - 2)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{4}_{\text{Residuo}}$$

EJEMPLO 2 | División larga de polinomios

Sean $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$. Encuentre polinomiales $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

SOLUCIÓN Usamos división larga después de insertar primero el término $0x^3$ en el dividendo para asegurar que las columnas queden alineadas correctamente.

$$\begin{array}{rll}
 & 4x^2 + 2x & \\
2x^2 - x + 2 & \overline{)\,8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1} & \\
 & \underline{8x^4 - 4x^3 + 8x^2} & \text{Multiplique el divisor por } 4x^2 \\
 & 4x^3 - 2x^2 - 3x & \text{Reste} \\
 & \underline{4x^3 - 2x^2 + 4x} & \text{Multiplique el divisor por } 2x \\
 & -7x + 1 & \text{Reste}
\end{array}$$

El proceso se completa en este punto porque $-7x + 1$ es de menor grado que el divisor $2x^2 - x + 2$. De la división larga de líneas antes vemos que $Q(x) = 4x^2 + 2x$ y $R(x) = -7x + 1$, de modo que

$$8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 = (2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1)$$

<u>División sintética</u>

La división sintética es un método rápido de dividir polinomios; se puede usar cuando el divisor es de la forma x + c. En división sintética escribimos sólo las partes esenciales de la división larga.

División larga

$$\begin{array}{rl}
 & \overbrace{2x^2 - x - 3}^{\text{Cociente}} \\
x - 3 & \overline{)\,2x^3 - 7x^2 + 0x + 5} \\
 & \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 & -x^2 + 0x \\
 & \underline{-x^2 + 3x} \\
 & -3x + 5 \\
 & \underline{-3x + 9} \\
 & \underbrace{-4}_{\text{Residuo}}
\end{array}$$

División sintética

$$\begin{array}{c|rrrr}
3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
 & & 6 & -3 & -9 \\
\hline
 & \underbrace{2 \quad -1 \quad -3}_{\text{Cociente}} & & & \underbrace{-4}_{\text{Residuo}}
\end{array}$$

EJEMPLO 3 | División sintética

Use división sintética para dividir $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$.

SOLUCIÓN Empezamos por escribir los coeficientes apropiados para representar el divisor y el dividendo.

Divisor $x - 3$						Dividendo $2x^3 - 7x^2 + 0x + 5$
	3	2	−7	0	5	

Bajamos el 2, multiplicamos $3 \cdot 2 = 6$ y escribimos el resultado en el renglón de en medio. A continuación, sumamos.

3	2	−7	0	5	
		6			Multiplique: $3 \cdot 2 = 6$
	$\boxed{2}$	−1			Sume: $-7 + 6 = -1$

Repetimos este proceso de multiplicar y luego sumar hasta completar la tabla.

3	2	−7	0	5	
		6	−3		Multiplique: $3(-1) = -3$
	2	$\boxed{-1}$	−3		Sume: $0 + (-3) = -3$

3	2	−7	0	5	
		6	−3	−9	Multiplique: $3(-3) = -9$
	2	−1	$\boxed{-3}$	−4	Sume: $5 + (-9) = -4$

Cociente $2x^2 - x - 3$

Residuo -4

Del último renglón de la división sintética vemos que el cociente es $2x^2 - x - 3$ y el residuo es -4. Por lo tanto, $2x^3 - 7x^2 + 5 = (x - 3)(2x^2 - x - 3) - 4$

Ceros racionales de funciones polinomiales.

TEOREMA DE CEROS RACIONALES

Si la función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de P es de la forma

$$\frac{p}{q}$$

donde p es un factor del coeficiente constante a_0
y q es un factor del coeficiente principal a_n.

Ejemplo 4: Encuentre los ceros racionales de $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

Solución: Como el coeficiente principal es 1, cualquier cero racional debe ser un divisor del término constante 2. Entonces los ceros racionales posibles son 1, -1, -2 y 2. Probamos cada una de estas posibilidades.

$$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$
$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$
$$P(2) = (2)^3 - 3(2) + 2 = 4$$
$$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0$$

Los ceros racionales de *P* son 1 y -2.

Factorización de factores comunes

Usamos la Propiedad Distributiva para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la Propiedad Distributiva) al factorizar una expresión como un producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

← EXPANSIÓN

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

Por ejemplo: Al factorizar $3x^2 - 6x$ vemos que el máximo factor común en los términos $3x^2$ y $6x$ es $3x$, de modo que tenemos $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen.

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

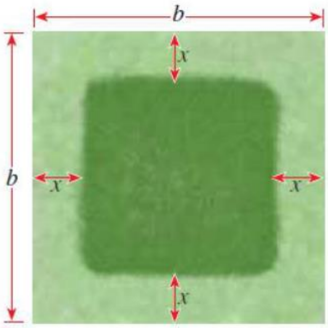
Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

Ejercicios Anexos:

132. Podar un campo Cada semana, un campo cuadrado de cierto parque estatal es podado alrededor de los bordes. El resto del campo se mantiene sin podar para que sirva como hábitat para aves y animales pequeños (vea la figura). El campo mide b pies por b pies, y la franja podada es de x pies de ancho.

(a) Explique por qué el área de la parte podada es $b^2 - (b - 2x)^2$.

(b) Factorice la expresión de la parte (a) para demostrar que el área de la parte podada también es $4x(b - x)$.



■ Factorice la expresión agrupando términos.

$x^3 + 4x^2 + x + 4$ $\quad$ $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

$2x^3 + x^2 - 6x - 3$ $\quad$ $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

$x^3 + x^2 + x + 1$ $\quad$ $x^5 + x^4 + x + 1$

■ Factorice por completo la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

$x^{5/2} - x^{1/2}$ $\quad$ $3x^{-1/2} + 4x^{1/2} + x^{3/2}$

$x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$ $\quad$ $(x - 1)^{7/2} - (x - 1)^{3/2}$

$(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

$x^{-1/2}(x + 1)^{1/2} + x^{1/2}(x + 1)^{-1/2}$

■ Use una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

$9a^2 - 16$ $\quad$ $(x + 3)^2 - 4$

$27x^3 + y^3$ $\quad$ $a^3 - b^6$

$8s^3 - 125t^3$ $\quad$ $1 + 1000y^3$

$x^2 + 12x + 36$ $\quad$ $16z^2 - 24z + 9$

Unidad 3:
Ecuaciones

1 Introducción

Igualdad: es la expresión en la cual dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.

Por ej.

$$a = b + c$$

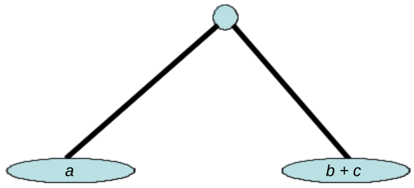


Figura 1 Representación de una igualdad

Ecuación: es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas, llamadas incógnitas, y que solo se verifican o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.

$$5x + 2 = 7$$

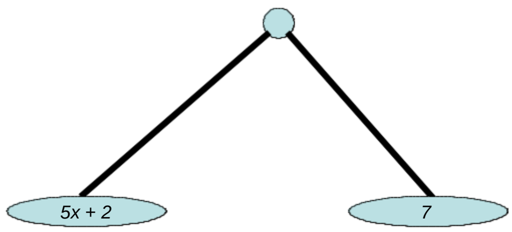
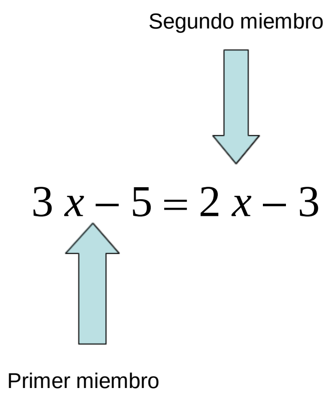


Figura 2 Representación de una ecuación

Se llama **primer miembro de una ecuación** a la expresión que está a la izquierda del signo de la igualdad y **segundo miembro** a la expresión que se encuentra a la derecha.



1.2 Algunas definiciones importantes

Término: Son cada una de las cantidades que están conectadas por el signo + o -.

Grado de una ecuación: Es el exponente mayor que tiene la incógnita en la ecuación.

Raíces o soluciones de una ecuación: Son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación.

Solución de una ecuación: Es el procedimiento para encontrar las raíces de una ecuación.

Propiedades de igualdad

Para cualesquiera números reales a , b y c se tiene que:

a) Si $a = b \rightarrow a + c = b + c$ Propiedad de Adición
b) Si $a = b \rightarrow a - c = b - c$ Propiedad de Sustracción
c) Si $a = b \rightarrow a * c = b * c$ Propiedad de Multiplicativa
d) Si $a = b \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ Propiedad de División

1.3 Solución de ecuaciones de primer grado

La solución de ecuaciones de primer grado puede realizarse mediante la regla práctica que se muestran a continuación, la cual es simplemente la aplicación de las propiedades de igualdad.

Regla Práctica para resolver ecuaciones de primer grado:

1) Se efectúan las operaciones indicadas (si las hay).
2) Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan a la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.
3) Se reducen términos semejantes en cada miembro.
4) Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplo: Resolver la ecuación: $2x + 5 = 11$

2x +5=11	Trasladando el 5 al miembro derecho
2x =11–5	Realizando operaciones
2x = 6	Despejando a x
x = 6/2	Realizando la operación indicada
x = 3	

Comprobación:

$2x + 5 = 11$ Sustituyendo el valor encontrado
$2(3)+5=11$ Realizando operaciones
$11=11$

Ejemplo: Resolver la ecuación: $6x + 5 = 3x + 17$

$6x + 5 = 3x + 17$
① $6x - 3x = 17 - 5$ ②
$3x = 12$
③ $x = 12/3$ ④
$x = 4$

Comprobación:

⑤ $6x + 5 = 3x + 17$
$6(4) + 5 = 3(4) + 17$
$24+5=12+17$
$29=29$

Actividades:
Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita:

a) $5x = 8x - 15$
b) $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$
c) $9x - 11 = -10 + 12x$
d) $11x + 5x - 1 = 65x - 36$
e) $5x + 6 = 10x + 5$

1.4 Ecuaciones fraccionarias

Cuando se tienen ecuaciones que involucran fracciones, se puede aplicar el procedimiento anterior, adicionando un paso anterior, que es el de eliminar las divisiones, lo cual se hace por medio de multiplicaciones, por ejemplo, consideremos la siguiente ecuación:

$$\frac{x-3}{x+2} = \frac{x-2}{x+8}$$

Si la expresión $(x+8)$ la pasamos multiplicando a la expresión $(x-3)$ la expresión $(x+2)$ la pasamos a multiplicar $(x-2)$ se llega a:

$(x-3)(x+8) = (x-2)(x+2)$ Realizando operaciones

$x^2 + 8x - 3x - 24 = x^2 + 2x - 2x - 4$ Simplificando

$5x = 20$ Despejando a x

$x = \frac{20}{5}$ Realizando la operación

$x = 4$

Actividades:

a)	$\frac{3x}{5} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{5} = 0$	b)	$\frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{12} = \frac{x}{6} - \frac{5}{4}$
c)	$x - \frac{x+2}{12} = \frac{5x}{2}$	d)	$\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-4}{5}$
e)	$x - \frac{5x-1}{3} = 4x - \frac{3}{5}$	f)	$\frac{3x+5}{5} = 2x - 6$
g)	$\frac{x+4}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2x-2}{3}$	h)	$\frac{4x+6}{6} = 12 - 3x$
i)	$\frac{2x-5}{4x-1} = \frac{3x-4}{6x+9}$	j)	$\frac{6x-8}{9x+8} = \frac{2x-3}{3x+2}$

1.5 Solución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Pasos para la solución de problemas de planteo

a) Interpretar correctamente el significado de la expresión hablada o escrita, asignando a las variables o incógnitas las últimas letras del alfabeto (x, y, z).

b) Escribir la expresión o expresiones algebraicas procurando referir todas las variables a una sola que pudiera llamarse x.

c) Relacionar la información ya simbolizada para establecer una ecuación o inecuación

d) Resolver la ecuación o inecuación

e) Interpretar la solución algebraica en términos del lenguaje ordinario, comprobando que satisface las condiciones estipuladas.

Ejemplos

1. Hallar 3 números enteros consecutivos, tales que el duplo del menor mas el triplo del mediano mas el cuádruplo del mayor equivalga a 740.

Solución:

Sea x el primer número o menor

$x+1$ el segundo número o el mediano

$x+2$ el tercer número o el mayor

En base a las características expuestas en el texto tenemos que:

$$2x + 3(x+1) + 4(x+2) = 740$$

Realizando operaciones tenemos que: $2x + 3x + 3 + 4x + 8 = 740$

Simplificando tenemos que: $9x = 740$

De aquí tenemos que $x = 81$, por lo tanto los números son:

Primero:	81
Segundo:	81+1=82
Tercero:	81+2=83

2. Juan tenía 85 pesos. Gasto cierta suma y la que le quedo es el cuádruplo de la que gasto. ¿Cuánto gasto Juan?

Solución:

Sea x la cantidad que Juan gasto.

$$85 - x = 4x$$

Aplicando las reglas para resolver ecuaciones de primer grado tenemos:

$85 = 5x$ de aquí vemos que $x = \frac{85}{5} = 17$. Por lo que se ve que Juan gasto 17 pesos.

2. *Sistemas de Ecuaciones de Primer grado con dos incógnitas*

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que contienen 2 o más incógnitas. Para que un sistema de ecuaciones se pueda resolver es necesario que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas.

Ejemplo: 5 trajes y 3 sombreros cuestan $ 4180, en tanto que 8 trajes y 9 sombreros cuestan $ 6940. ¿Cuál es el precio de un traje y cuál es el precio de un sombrero?

Debido a las condiciones del problema, no es tan fácil expresarlo en términos de una sola incógnita, por lo que usaremos dos incógnitas.

Sea x el precio por traje
y el precio por sombrero

Debido a que 5 trajes y 3 sombreros cuestan $ 4180 se puede plantear la siguiente ecuación:

$$5x + 3y = 4180$$

Con la otra condición del problema se puede plantear una segunda ecuación:

$$8x + 9y = 6940$$

Hemos obtenido dos ecuaciones, a las cuales llamaremos sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, a continuación se mencionarán los principales métodos para la solución de este tipo de ecuaciones.

Métodos de Solución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

MÉTODO GRÁFICO

Consideremos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & (1) \\ x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

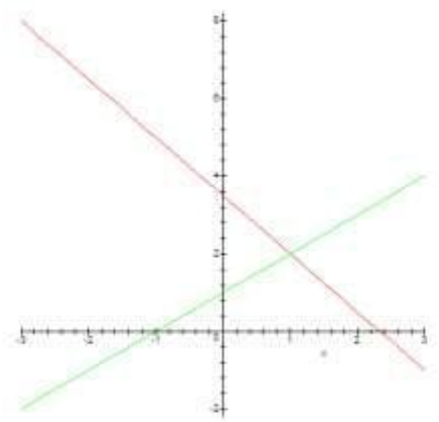
Si de la ecuación se despeja a la variable y se tiene:

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ se puede apreciar que se obtiene una función lineal de la forma $y = mx + b$

Si repetimos el procedimiento de despejar a la variable y, pero ahora de la ecuación (2) se tendrá:

$y = x + 1$ ésta es nuevamente una función lineal.

Si ahora, graficamos ambos funciones en un mismo plano se tendrá:



Se aprecia que ambas rectas se cortan en un punto $P(x, y)$, en donde $x = 1$ y $y = 2$. Estos valores corresponden a la solución del sistema de ecuaciones.

Recapitulando:

Este método consiste de:

1) Graficar la función lineal asociada con la ecuación (1)
2) Graficar la función lineal asociada con la ecuación (2)
3) Encontrar el punto de intersección entre ambas rectas, el cual es la solución buscada.

Ejercicio: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con dos incógnitas por el método gráfico:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 7x + 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 6x + 10y = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 5y = -110 \\ -5x + y = 24 \end{cases}$

2.1 *MÉTODO DE SUMAS Y RESTAS*

Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & (1) \\ x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

Tratemos de sumar la ecuación (1) con la ecuación (2) de tal forma que al efectuarse la operación se obtenga una tercera ecuación que no contenga alguna de las incógnitas.

$$\begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 8 \\ \hline 3x + 3y = 15 \end{array}$$

Se puede apreciar, que al realizar directamente la operación de suma, se genera una tercera ecuación, la cual contiene las dos incógnitas.

Tratemos de buscar otra alternativa, por ej., multipliquemos la ecuación (2) por -2

$$\begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ -2x - 4y = -16 \\ \hline \quad -3y = -9 \end{array}$$

Ahora, el resultado es una ecuación de primer grado con una sola incógnita. Resolviendo esta ecuación tenemos:

$$y = \frac{-9}{-3} = 3$$

Del sistema de ecuaciones original, conocemos ahora el valor de y, el cual podemos sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones originales. Si lo sustituimos en la ecuación (1), por ejemplo se tiene que:

$$2x + y = 7$$

$$2x + 3 = 7$$

Se aprecia que se forma una ecuación de primer grado con una incógnita, resolviendo tenemos:

$$2x = 7 - 3$$
$$x = \frac{4}{2} = 2$$

Hemos obtenido la ecuación a nuestro sistema de ecuaciones, procedamos a continuación a realizar la comprobación, procurando que ésta se haga utilizando la ecuación distinta a la que fue usada en la sustitución, en este caso la ecuación (2).

$$y + 2x = 8$$
$$2 + 2(3) = 8$$
$$8 = 8$$

Recapitulando:

1) Sumar la ecuación (1) con la (2) de tal manera que se elimine alguna de las incógnitas. Se pueden multiplicar las ecuaciones por algún factor que asegure tener los mismos coeficientes pero con signos contrarios.
2) Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene del paso anterior.
3) Sustituir el valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones originales.
4) Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita que resulta del paso anterior.
5) Realizar la comprobación.

Ejercicio: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con dos incógnitas por el método de sumas y restas:

a) $\begin{cases} 2x + 8y = 4 \\ 15x + 10y = -10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 5x + 3y = -19 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 6x - 9y = 15 \end{cases}$

2.2 Método se Sustitución

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 13 & (1) \\ 3x - y = 5 & (2) \end{cases}$$

Si despejamos y de la ecuación (2) tenemos:

$$y = 3x - 5 \quad (3)$$

El valor de y es el mismo en la ecuación (1) y (2) por lo que se puede sustituir el valor encontrado de y, obtenido de la ecuación (2), en la ecuación (1), de tal forma que:

$$5x + 3y = 13$$

Pero $y = 3x - 5$

Entonces: $5x + 3(3x - 5) = 13$

Realizando la manipulación algebraica se tiene que:

$$5x + 9x - 15 = 13$$

Se aprecia que ésta es una ecuación de primer grado con una incógnita, la cual al resolverse nos da:

$$14x = 28$$
$$x = 2$$

Debido a que hemos encontrado el valor de x, lo podemos sustituir en la ecuación (3) para obtener el valor de y.

$$y = 3x - 5$$

Sustituyendo el valor de x

$$y = 3(2) - 5$$
$$y = 1$$

Realizando la comprobación en la ecuación (1) se tiene que:

$$5x + 3y = 13$$

Sustituyendo soluciones:

$$5(2) + 3(1) = 13$$
$$13 = 13$$

Recapitulando:

1) Despejar alguna variable de cualquiera de las dos ecuaciones
2) Sustituir el valor de la variable despejada en la otra ecuación
3) Realizar operaciones y resolver la ecuación de primer grado que resulta
4) Sustituir el valor encontrado en la expresión donde se despejo la primera variable y realizar operaciones, con el objeto de conocer el valor de la segundo incógnita.
5) Realizar la comprobación.

Ejercicio: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con dos incógnitas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 5x + 3y = -19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3x + 6y = 8 \end{cases}$

2.3 *Método de Igualación:*

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 & (1) \\ 5x - 2y = 13 & (2) \end{cases}$$

Si se despeja la incógnita x de la ecuación (1) se tiene:

$$x = 6 - 3y \qquad (3)$$

Si despejamos ahora a la misma incógnita x, pero ahora de la ecuación (2) obtendremos:

$$x = \frac{13 + 2y}{5} \qquad (4)$$

Puesto que $x = x$ podemos entonces igualar la expresión (3) con la expresión (4)

$$6 - 3y = \frac{13 + 2y}{5}$$

Se ha obtenido una ecuación de primer grado con una incógnita, la cual podemos resolver de la siguiente manera:

$$5(6 - 3y) = 13 + 2y$$

Realizando operaciones

$$30 - 15y = 13 + 2y$$

$$30 - 13 = 2y + 15y$$

$$y = \frac{17}{17} = 1$$

Sustituyendo el valor de y en la ecuación (3) con el objeto de encontrar el valor de x:

$$x = 6 - 3y$$

$$x = 6 - 3(1)$$

$$x = 3$$

Realizando la comprobación en la ecuación (1)

$$x + 3y = 6$$

Sustituyendo los valores encontrados:

$$3 + 3(1) = 6$$

$$6 = 6$$

Recapitulando:

1) Despejar cualquiera de las dos incógnitas en la ecuación (1)
2) Despejar la misma incógnita en la ecuación (2)
3) Igualar las expresiones despejadas
4) Resolver la ecuación de primer grado con una incógnita encontrada
5) Sustituir el valor encontrado en cualquiera de las expresiones obtenidas al hacer los despejes con el fin de encontrar el valor de la segunda incógnita.
6) Realizar la comprobación.

Ejercicios: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por medio del método de igualación.

a) $\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x - 4y = 5 \\ 9x + 8y = 13 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9x + 16y = 7 \\ 4y - 3x = 0 \end{cases}$

3 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

3.1 Introducción

Ecuación de segundo grado es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente es el dos.

Así por ejemplo: $4x^2 + 7x + 6 = 0$ Es una ecuación de segundo grado.

3.2 Métodos de solución de ecuaciones de segundo grado

3.2.1 Método Gráfico

Consiste en hacer una gráfica de la función cuadrática y ver en qué lugares la gráfica de la función cruza el eje x ; estos puntos serán las raíces o ceros de nuestra ecuación.

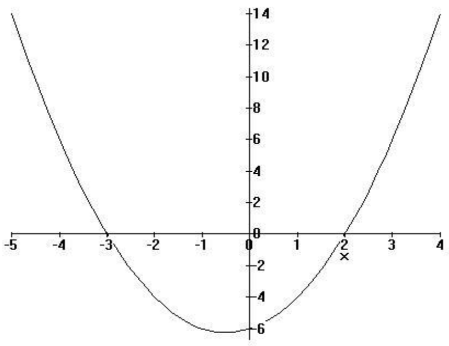
Ejemplo 1:

Sea la ecuación cuadrática: $x^2 + x - 6 = 0$

Encontrar sus raíces:

Solución:

Primeramente convertiremos la ecuación en función sustituyendo el 0 por la y.



De la gráfica se puede apreciar que los puntos de intersección con el eje x son $x = -3$ y $x = 2$, los cuales por lo tanto serán los valores de las raíces o ceros de nuestra ecuación.

Comprobación: $x^2 + x - 6 = 0$

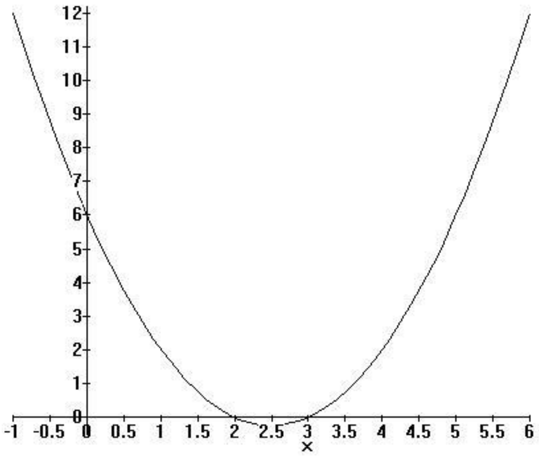
Sustituyendo la primera solución: $(-3)^2 + (-3) - 6 = 0$

Realizando operaciones: $0 = 0$

Ejemplo 2:

Sea la ecuación cuadrática: $x^2 - 5x + 6 = 0$
Encontrar sus raíces:

Solución:



De la gráfica se puede apreciar que los puntos de intersección con el eje x son $x = 2$ y $x = 3$, los cuales por lo tanto serán los valores de las raíces o ceros de nuestra ecuación.

3.2.2 Método de la Formula General

Una ecuación de segundo grado tiene la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La solución de la ecuación anterior consiste en encontrar el o los valores de x . Tratemos de despejar a la x :
Dividiendo cada termino por a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Llevando al primer miembro todos los términos que contengan x.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Formando un trinomio cuadrado perfecto

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b/a}{2}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b/a}{2}\right)^2$$

Factorizando:

$$\left(x+\frac{b/a}{2}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

Pasando el exponente al miembro derecho en forma de raíz

$$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}$$

Despejando a x

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}$$

Realizando la operación indicada dentro del radical

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Simplificando

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$$

Factorizando

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Donde a , b y c , son los coeficientes de la función cuadrática $ax^2+bx+c=0$

Ejemplo: sea la ecuación cuadrática $3x^2-5x+2=0$ determinar el valor de sus raíces.

Solución.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se tiene que: $a=3$; $b=-5$ y $c=2$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(2)}}{2(3)}$$

Sustituyendo los valores de a , b y c en la ecuación tenemos:

Simplificando tenemos:

$$x = \frac{5 \pm 1}{6}$$

Como se puede apreciar en la formula aparece el símbolo ±, el cual indica que vamos a tener dos soluciones, la primera utilizando el signo +, y la segundo utilizando el signo -. Por lo que tenemos:

$$x_1 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \qquad x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Por lo que las soluciones de nuestra ecuación cuadrática son $x = 1$ y $x = 2/3$.

Ejemplo: Sea la ecuación cuadrática $x^2 = -15x - 56$ determinar el valor de sus raíces.

Solución.

$$x^2 + 15x + 56 = 0$$

Reordenando la ecuación tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se tiene que: $a = 1$; $b = 15$ y $c = 56$

Sustituyendo los valores de a , b y c en la ecuación tenemos:

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4(1)(56)}}{2(1)}$$

Simplificando tenemos:

$$x = \frac{-15 \pm 1}{2}$$

Como se puede apreciar en la formula aparece el símbolo ±, el cual indica que se tienen dos soluciones, la primera utilizando el signo +, y la segunda utilizando el signo - por lo que tenemos:

$$x_1 = \frac{-15+1}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \qquad x_2 = \frac{-15-1}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

Por lo que las soluciones de nuestra ecuación cuadrática son: $x = -7$ y $x = -8$

3.2.3 Método de Factorización

Este método consiste en factorizar la expresión de nuestra ecuación cuadrática, la cual es un trinomio, en un producto de binomios.

Una vez que se tiene el producto de binomios, se procede a igualar cada factor con cero y así encontrar el valor de cada una de las raíces.

Ejemplo: Sea la ecuación: $x^2 - x - 6 = 0$, determinar el valor de sus raíces por el método de factorización.

Solución.

Este trinomio lo podemos factorizar como:

$$(x-3)(x+2) = 0$$

Igualando cada factor a cero tenemos que:

$$x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3$$
$$x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

Lo cual nos lleva a las soluciones de nuestra ecuación, o sea que $x = 3$ y $x = -2$.

Ejemplo: Sea la ecuación: $x^2 + 7x - 18 = 0$, determinar el valor de sus raíces por medio del método de factorización.

Este trinomio lo podemos factorizar como:

$$(x+9)(x-2) = 0$$

Igualando cada factor a cero tenemos que:

$$x + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -9$$
$$x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Lo cual nos lleva a las soluciones de nuestra ecuación, o sea que $x = -9$ y $x = 2$.

3.4 Sistemas Mixtos.

Sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Este tipo de sistema de ecuaciones puede ser resuelto mediante la siguiente forma:

- Despejar alguna de las incógnitas de la ecuación lineal.
- Sustituir la expresión de la incógnita despejada en la ecuación cuadrática
- Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita que se forma.
- Sustituir los dos valores encontrados en la ecuación obtenida en el primer paso para así encontrar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo: resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 5 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

Solución:

Despejando *x* de 2:

$$x = \frac{2y+1}{2}$$

Sustituyendo el valor de *x* en 1:

$$4\left(\frac{2y+1}{2}\right)^2 + 4y^2 = 5$$

Realizando operaciones es fácil ver que:

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante mediante la fórmula general:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(2)}}{2(2)}$$

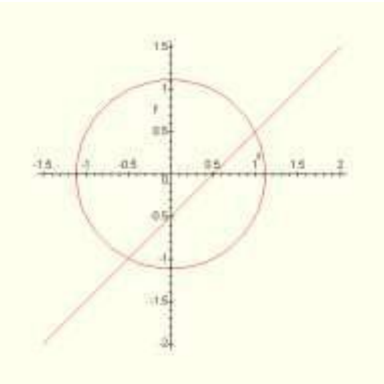
$$y_1 = \frac{1}{2} \qquad y_2 = -1$$

Sustituyendo los valores de *y* en 3 se obtienen los valores de *x*

$$x_1 = \frac{2y_1+1}{2} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{2y_2+1}{2} = \frac{2(-1)+1}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Grafiquemos en un mismo plano las dos ecuaciones:



De la gráfica anterior podemos apreciar que las dos ecuaciones tienen dos puntos de intersección, los cuales están dados por las soluciones obtenidas. El primer punto de intersección tiene coordenadas: A (1,1/2), mientras que el segundo tiene coordenadas B (-1/2,-1).

Recapitulando:
1. Despejar alguna de las dos variables de la ecuación lineal.
2. Sustituir el valor de la variable despejada en la ecuación cuadrática.
3. Resolver la ecuación de segundo grado resultante del paso anterior.
4. Sustituir los valores encontrados en la ecuación obtenida en el paso 1.
5. Realizar la comprobación.

Actividades:
Soluciónese los siguientes sistemas de ecuaciones:

a. $\begin{cases} 5x^2 - y^2 = 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 15 \\ x + y = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ *d.* $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

3.4.1 Sistemas de ecuaciones Especiales (sección Opcional):

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ dx^2 + ey^2 = f \end{cases}$$

Este tipo de ecuaciones puede ser resuelto de la siguiente forma:

- Sumar la ecuación (1) con la ecuación (2) de forma tal que una de las variables se elimine.
- Resolver la ecuación de segundo grado que se obtiene del paso anterior.
- Sustituir en forma individual los valores obtenidos en el paso anterior en cualquiera de las ecuaciones originales con el objeto de encontrar el valor de las otras dos incógnitas.

Ejemplo: resolver:

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 7 \quad (1) \\ 2x^2 - y^2 = 7 \quad (2) \end{cases}$$

Resolviendo por sumas y restas se tiene:

Si multiplicamos a (2) por 3 y sumamos con (1):

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 7 && (1) \\ 6x^2 - 3y^2 &= 21 && (2) \\ 7x^2 &= 28 \end{aligned}$$

Resolviendo para x se obtiene:

$$x = \pm\sqrt{4} \qquad \text{Entonces:} \quad x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

Sustituyendo los valores de x en (1) o (2). En este caso utilizaremos (1) se llega a:

Sustituyendo el valor de $x_1 = 2$

$$(2)^2 + 3y^2 = 7$$

Despejando y se tiene:

$$y = \pm\sqrt{1} \qquad \text{Entonces:} \quad y_1 = 1 \qquad y_2 = -1$$

Sustituyendo el valor de $x_2 = -2$

$$(-2)^2 + 3y^2 = 7$$

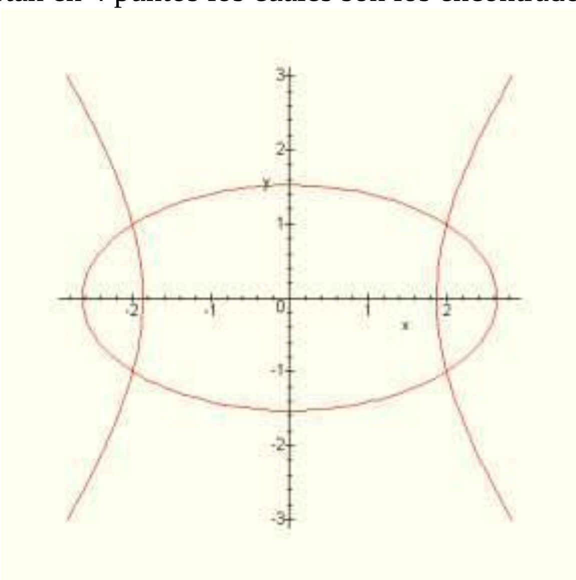
Despejando y se tiene:

$$y = \pm\sqrt{1} \qquad \text{Entonces:} \quad y_1 = 1 \qquad y_2 = -1$$

Se tiene entonces que la solución está asociada con 4 puntos en el plano, los cuales son:

$A(2,1)$
$B(2,-1)$
$C(-2,1)$ D
$(-2,-1)$

La grafica de las dos ecuaciones se muestra en la Figura siguiente. Se puede apreciar que las ecuaciones se cortan en 4 puntos los cuales son los encontrados.



Recapitulando:

1. Combinar la ecuación (1) con la ecuación (2) de tal forma que al sumarse las dos ecuaciones se elimine una de las dos incógnitas.
2. Resolver la ecuación cuadrática resultante del paso 1.
3. Sustituir los dos valores encontrados en el paso 2 en la ecuación (1) o (2) para encontrar las otras dos incógnitas.
4. Realizar la comprobación.

3.5 Ecuaciones de 2° grado con una incógnita.

3.5.1 Definición

Llamadas también ecuaciones CUADRÁTICAS son aquellas ecuaciones que presentan la siguiente forma general:

$$\boxed{a x^2 + b x + c = 0} \;\; ; \quad \forall a \neq 0 \;\; y \; a, b, c \subset R$$

Donde a, b y c son llamados coeficientes y que pueden ser reales o complejos

El coeficiente "a" se llama coeficiente cuadrático o de segundo grado.
El coeficiente "b" se llama coeficiente lineal o de primer grado y
El coeficiente "c" se llama término lineal.

Si los coeficientes a, b y c son diferentes de cero, la ecuación de segundo grado se llama completa y si b ó c o ambos, son ceros, la ecuación de segundo grado se llama incompleta.

Así dado: a, b y c $\neq$ 0 entonces: $ax^2 + bx + c = 0$ se llama ecuación de segundo grado completa.

Se llaman ecuaciones de segundo grado incompletas

Toda ecuación de segundo grado presenta dos raíces o soluciones, llamémoslas, x_1 y x_2

Estas raíces se pueden obtener mediante dos métodos:

a) Método de la fórmula general:

De la ecuación $a x^2 + b x + c = 0$ se deduce la formulación clásica que despeja la variable:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Siendo: $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se define la cantidad subradical: $b^2 - 4ac$ como el discriminante (invariante Característico) de la ecuación cuadrática y se le denota por :"Δ", luego:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

b) Método de factorización:

Consiste en factorizar el polinomio de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$ siempre y cuando se pueda.

Los pasos de este método son los siguientes:

Se trasladan todos los términos a un sólo miembro dejando el otro miembro igual a cero.

Se factoriza este miembro por el método del aspa simple.

Para obtener las raíces de la ecuación, se iguala cada factor a cero.

3.5.1.2 Discusión de las raíces de una ecuación de segundo grado

Las raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado : $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall$ $a \neq 0$ dependen de la discriminante así:

Primer caso:

Si > 0 entonces las raíces x_1 y x_2 son reales y desiguales.
Ahora bien en este caso se presentan dos situaciones:

a) si es un cuadrado perfecto las raíces x_1 y x_2 son racionales.
b) si no es un cuadrado perfecto las raíces x_1 y x_2 son irracionales Conjugadas.

Segundo caso:

Si = 0 entonces las raíces x_1 y x_2 son reales e iguales (raíces dobles) donde:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Tercer caso:

Si < 0 entonces las raíces x_1 y x_2 son complejos y conjugados.

3.5.1.3 Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado

Sea la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ y sus raíces x_1 y x_2 tendremos Las siguientes propiedades:

a) Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

b) Producto de raíces:

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

c) Diferencia de raíces:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

d) Suma de cuadrados de las raíces:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

e) Identidad de Legendre aplicada a las raíces:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 . x_2$$

3.5.2 Construcción de una ecuación de segundo grado conociendo sus raíces

Conociendo las dos raíces x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado ,esta se construye empleando la suma y el producto de dichas raíces.

Luego la ecuación que dió origen a x_1 y x_2 es:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 . x_2) = 0$$

Llamada también: forma canónica de la ecuación de segundo grado.

O bien: $x^2 - Sx + P = 0$

Siendo: $S = x_1 + x_2$ y

$P = x_1 . x_2$

3.5.3 Propiedades adicionales de las raíces

La ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall\, a \neq 0$ tiene raíces simétricas (raíces de igual valor pero de signo contrario) si y solo si:

$x_1 = -x_2$ de allí que: $x_1 + x_2 = 0$ entonces $b = 0$ .....(12)

La ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall$ $a\neq0$ tiene raíces recíprocas (una de las raíces es la inversa de la otra) si y solo si:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \text{ de allí que : } x_1 . x_2 = 1 \text{ entonces } a = c$$

Raíz nula

Dada la ecuación de segundo grado : $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall$ $a\neq0$,si esta presenta una raíz nula (x=0) entonces :

$$c = 0$$

Raíz Unidad .

Dada la ecuación de segundo grado : $ax^2 + bx + c = 0$, $\forall$ $a\neq0$,si esta presenta una raíz unidad (x=1) entonces :

$$a + b + c = 0$$

3.5.4 *Teorema de las ecuaciones cuadráticas equivalentes*

Sean las ecuaciones cuadráticas (o de segundo grado):

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \;;\; \forall a \neq 0$$

y

$$m\,x^2 + n\,x + p = 0 \;;\; \forall m \neq 0$$

Si estas ecuaciones tienen las mismas raíces se dice que dichas ecuaciones son EQUIVALENTES y se cumple que :

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \;; \qquad m, n \text{ y } p \neq 0$$

Es decir que los coeficientes de cada término semejante son proporcionales entre sí.

Teorema de la raíz común

Sean las siguientes ecuaciones cuadráticas:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \;;\; \forall a \neq 0$$
$$m\,x^2 + n\,x + p = 0 \;;\; \forall m \neq 0$$

Admiten una raíz común, luego se cumplirá la siguiente relación:

$$(a.n - m.b)\,(b.\,p - n.c) = (a.\,p - m.c)^2$$

Anexo

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

El estudio de sistemas de ecuaciones lineales es un problema clásico de la matemática. Cuando se trata de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se aplican diversos métodos de resolución sencillos de tipo gráfico y algebraico; si el número de ecuaciones es superior, es preferible recurrir al empleo de matrices y determinantes.

Se llama sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de igualdades algebraicas en las que aparece una o varias incógnitas elevadas a la potencia uno. Cada una de estas ecuaciones lineales, o de primer grado, tiene la forma $ax + by + cz + \ldots = k$, donde a, b, c, ..., son los coeficientes de la ecuación; x, y, z, ..., las incógnitas o variables, y k el término independiente (valor constante)

Los sistemas en los que el número de ecuaciones coincide con el de las incógnitas se denominan cuadrados. Un caso particularmente interesante de sistemas cuadrados es el de dos ecuaciones con dos incógnitas, que adopta la forma general siguiente:

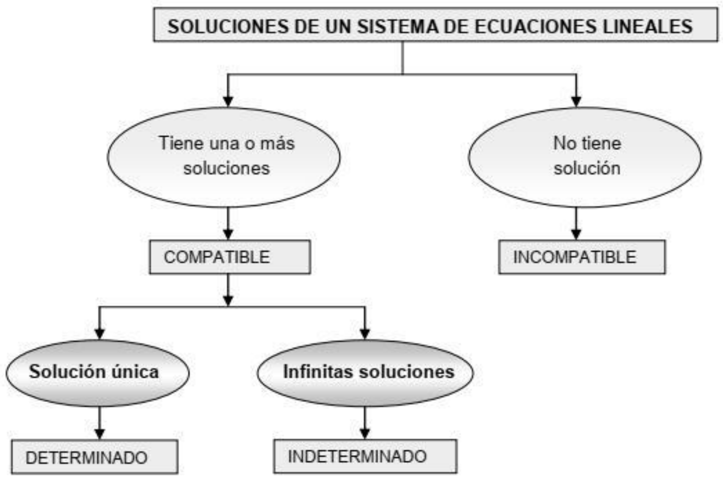
$$\begin{cases} a_1.x + b_1.y = k_1 \\ a_2.x + b_2.y = k_2 \end{cases}$$

Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, significa hallar el conjunto de raíces o ceros comunes a ambas ecuaciones. Es decir, consiste en encontrar la intersección de los conjuntos solución de ambas ecuaciones.

Tipos de sistemas lineales

En el análisis de un sistema de ecuaciones lineales se pueden presentar varios casos:

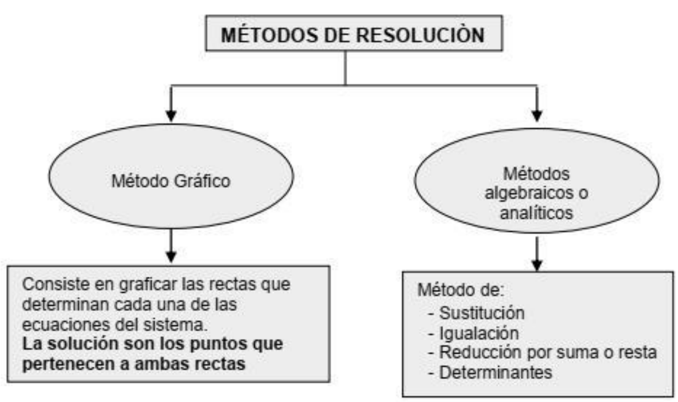
- Si el sistema tiene solución, y ésta es única, se denomina compatible determinado.
- Cuando presenta varias soluciones posibles, es compatible indeterminado.
- Si no tiene solución, se denomina incompatible.



Dos sistemas de ecuaciones lineales que tienen las mismas soluciones son equivalentes. En la noción de equivalencia se basan las principales técnicas algebraicas de resolución de estos sistemas, que persiguen convertirlos en otros cuya resolución sea más sencilla.

Métodos de resolución de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

Existen distintos métodos que no permiten resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.



Unidad 4:
Funciones

4.1. Relaciones funcionales. Función biyectiva - Función inversa.

4.1.1 Introducción

Función: se dice que *y* es función de *x* cuando a cada valor de la variable *x* corresponden uno o varios valores determinados de la variable *y* . Esta correspondencia se da a través de una expresión matemática que denominamos función. Gráficamente esta relación entre variables se puede mostrar en la Figura 1:

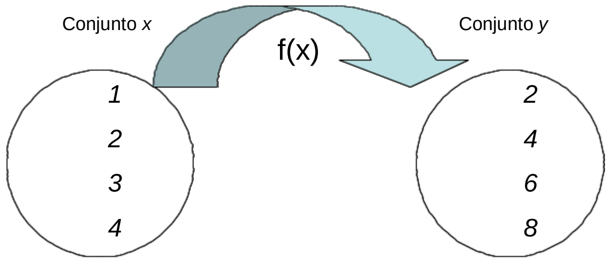


Figura 1 Representación conceptual de una función

El elemento de que corresponde al elemento de se llama *"valor de f en x"* o *"imagen de x"* y se escribe:

ó

Ejemplo: $y = 3x + 4$

Dominio de una función: (conjunto *X* o conjunto de partida), es el conjunto de existencia de la misma, es decir, los valores para los cuales la función está definida. Lo representaremos con *Df* ó *Domf.*

Rango de una función: conjunto *Y* o conjunto de llegada. Lo representaremos con *Rf*.

Imagen o Contra dominio: Es el conjunto de los valores reales que toma la variable y o f(x). Lo representaremos con *If*.

4.1.2 Definición formal de función

Sea X e Y dos conjuntos, diremos que f es una función solo si se cumplen dos condiciones:

Condición de Existencia: para cada elemento , existe al menos un , tal que el par (x,y) pertenece a la función.

Simbólicamente: ∀

Donde:

Condición de Unicidad: cada elemento de X debe estar relacionado con un único elemento de Y.

Simbólicamente:

4.1.3 Evaluación de funcione

Evaluar una función consiste en determinar el valor de la variable y en base a un valor de una variable x.

Ejemplo: Determinar el valor de: f(1), f(3), f(0), f(-3)

$$f(1) = 3(1)+4 = 7$$
$$f(3) = 3(3)+4 = 13$$
$$f(0) = 3(0)+4 = 4$$
$$f(-3) = 3(-3)+4 = -5$$

Ejemplo:

En base a la función $y = \dfrac{4x-3}{x+3}$

Determinar: f(1), f(3), f(0) y f(-3)

$$f(1) = \frac{4(1)-3}{1+3} = \frac{1}{4}$$

$$f(3) = \frac{4(3)-3}{3+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = \frac{4(0)-3}{0+3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$f(-3) = \frac{4(-3)-3}{-3+3} = \frac{-15}{0} = \infty$$ [1]

[1] Recuérdese que cualquier cantidad dividida entre cero genera una indeterminación (∞)

Actividades:

1. *Encontrar el valor de f(1), f(-3) y f(0) para las funciones:*

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ *b)* $f(x) = \frac{x+3}{2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ *d)* $f(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \sqrt{1 - x}$ *f)* $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x + 2}$

g) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x}$ *h)* $f(x) = (2x + 5)^2$

4.1.4 Representación gráfica de las funciones

Un sistema rectangular de coordenadas cartesianas son dos líneas rectas perpendiculares que se cortan en un punto llamado origen. Estas líneas dividen al plano en cuatro secciones llamadas cuadrantes, los cuales se numeran de la forma mostrada en la Figura 2.

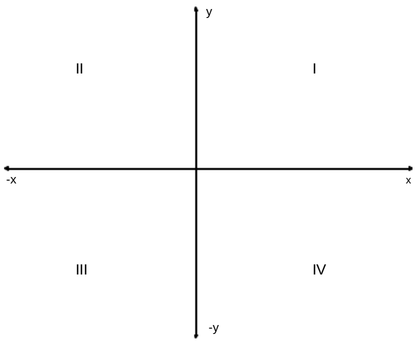
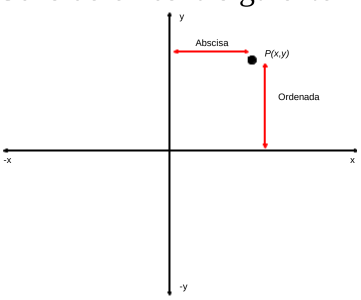


Figura 2 Sistema de ejes cartesianos

La línea XOX' se llama eje de las x o eje de las abscisas
La línea YOY' se llama eje de las y o eje de las ordenadas

Abscisa y ordenada de un punto

Consideremos la siguiente Figura 3:



Figuran 3 **Ordenada y abscisa de un punto**

La distancia de un punto al eje de las ordenadas se llama abscisa del punto, en tanto que la distancia al eje y se llama ordenada del punto. La abscisa y la ordenada de un punto son las coordenadas cartesianas del punto.

4.1.4 Gráfica de una función

Sea $y = f(x)$. Se sabe que para cada valor de x corresponden uno o varios valores de y. Si se toman los valores de x como abscisas y los valores de y como ordenadas, se obtendrá una serie de puntos. El conjunto de estos puntos puede ser una recta, una curva, etc., la cual es el gráfico de la función.

Ejemplo:

Sea la función $y = x + 1$, obtener su gráfica.

Si definimos un conjunto de valores para la variable independiente (x) tales como: *-3, -2, -1, 0 1 2 y 3.*

Los valores que tomará la variable y serán:

Para $x = -3$ $\quad y = -3 + 1 = -2$

Para $x = -2$ $\quad y = -2 + 1 = -1$

Para $x = -1$ $\quad y = -1 + 1 = 0$

Para $x = 0$ $\quad y = 0 + 1 = 1$

Para $x = 1$ $\quad y = 1 + 1 = 2$

Para $x = 2$ $\quad y = 2 + 1 = 3$

Para $x = 3$ $\quad y = 3 + 1 = 4$

En forma tabular la relación entre x y $y$puede ser representada de la siguiente manera:

x	y
-3	-2
-2	-1
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

Representemos cada punto en un plano cartesiano cada uno de los puntos que se forman la combinación de un valor de x y un valor de y el cual se representa como P(x,y). La Figura 4 muestra la representación en un plano cartesiano de la función $y = x + 1$.

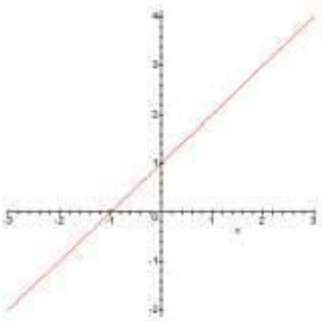


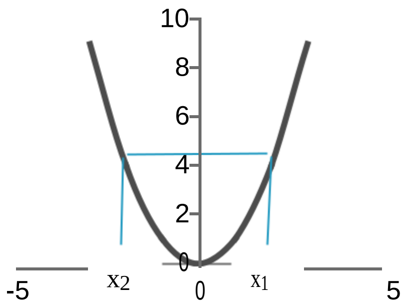
Figura 4 Gráfica de la función $y = x + 1$

4.2 Clasificación de funciones

Función Inyectiva:

Una función ⇔ ∀

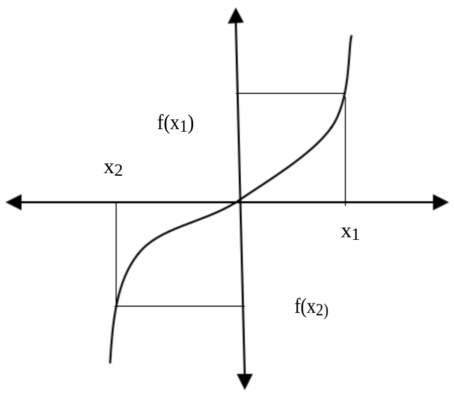
Ejemplos:



x1 x2

y f(x1) f(x2)

Entonces, NO es Inyectiva,



x1 x2

y f(x1) f(x2)

Entonces, SI es Inyectiva

⇔ ∀ (es decir,

Función Inyectiva:

Una función

el rango es igual a la imagen).

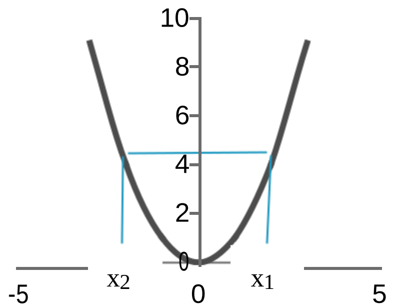
Ejemplos:

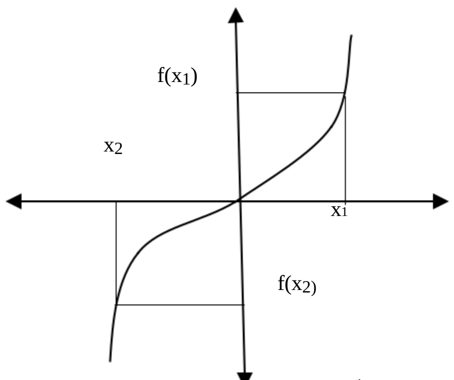
$R(f) = \mathbb{R}$

$I(f) = \mathbb{R}^{+}_{0}$

R(f) I(f)

NO es Sobreyectiva





$R(f) = \mathbb{R}$

$I(f) = \mathbb{R}$

$R(f) = I(f)$

Es Sobreyectiva

Función Biyectiva:

Una función es biyectiva ⇔ es Inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplos:

Analizar si las siguientes funciones son biyectivas:

1 -

⇔ $x_1 = x_2$

a) f es inyectiva $f(x_1) = f(x_2)$

Demostración x_1 x_2

$x_1 + 1$ $x_2 + 1$

$f(x_1)$ $f(x_2)$ f(x) es inyectiva

b) f es sobreyectiva ⇔ ∀

Para establecer se f es sobreyectiva, observamos que, si la imagen de "x" es "y", es de donde se deduce que x= y - 1, para que f sea

.

decir, no es

sobreyectiva debe ocurrir que ∀ Aquí observamos que cuando

sobreyevtiva

c) Luego no es biyectiva.

2 - –

a) x_1 x_2

½ x_1 ½ x_2

$g(x_1)$ $g(x_2)$ g(x) es inyectiva.

b) – ⇔ ∀ –

Es decir, ∀ resulta .

c) Luego g(x) es biyectiva.

3 -

a) Observemos que si x_1 x_2, no necesariamente $t(x_1)$ $t(x_2)$

Por ej. 2 -2 y $t(x_1) = t(x_2)$; luego t(x) no es inyectiva.

b) Como tampoco es sobreyectiva, pues al ser –,

Por ejemplo sin embargo, – , es decir, .

c) Luego t(x) no es biyectiva.

4.3 Análisis de funciones:

4.3.1 Dominio e Imagen.

Lo primero que hay que estudiar en una función es su dominio, o conjunto de valores x para los cuales f(x) existe o está definida.

Hay funciones que se crean artificialmente dando por definición el dominio (funciones definidas a trozos) o bien se tratan de funciones que modelizan una situación real que no tiene sentido para ciertos valores de x aunque matemáticamente se pueda calcular.

Las funciones polinómicas están definidas en todo R.

Las funciones racionales (cociente de polinomios), no están definidas en los valores que anulan el denominador.

Recordemos: Dominio de una función, es el conjunto formado por los elementos de *x*.

Imagen o Contra dominio, es el conjunto formado por los elementos de *y* que corresponden al conjunto de llegada del dominio.

Actividades:

1. Determinar el rango y el dominio para las funciones:

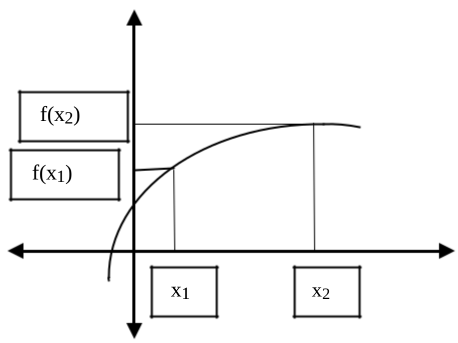
a) $y = 3x - 2$	b) $y = 3x + 2$
c) $y = \lvert x \rvert$	d) $y = \lvert x - 1 \rvert$
e) $y = x^2 - 9$	f) $y = x^2 - x - 6$
g) $y = \frac{1}{x}$	h) $y = \frac{1}{x - 1}$
i) $y = \sqrt{25 - x^2}$	j) $y = \sqrt{x^2 - 25}$

4.3.2 Intervalos de crecimiento decrecimiento.

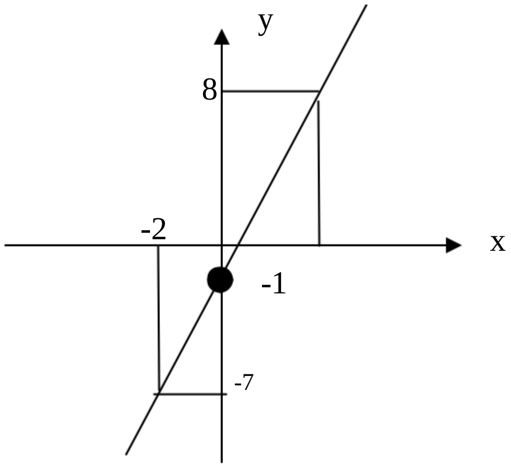
Función Creciente:

Diremos que una función es creciente cuando para dos valores x_1 , x_2 que pertenecen al dominio, que cumplen con $x_1 \leq x_2$ se verifica que $f(x_1) \leq f(x_2)$

En símbolos: $\forall x_1 ; x_2 \in D(f) \wedge x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



Ejemplo: $y = f(x) = 3x - 1$



$x_1 = -2;\ x_2 = 3 \Rightarrow x_1 \langle x_2$

$f(x_1) = f(-2) = 3(-2) - 1 = -7$

$f(x_2) = f(3) = 3.3 - 1 = 8$

$f(x_1) \langle f(x_2)$

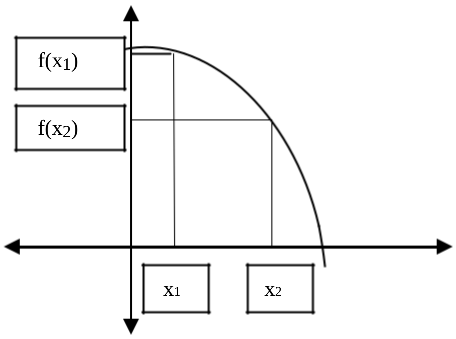
$\begin{cases} Dom(f): R \\ Rg(f): R \end{cases}$

Se ve entonces que la función crece en todo el Dominio. Crece: .

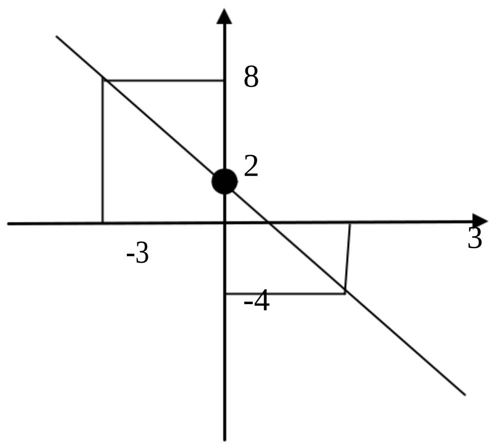
Función decreciente

Una función es decreciente cuando para dos valores x_1 ; x_2 que pertenecen al dominio, que cumplen con $x_1 \le x_2$; se verifica que $f(x_1) \ge f(x_2)$.

En símbolos: $\forall x_1 ; x_2 \in D(f) \wedge x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$



Ejemplo:



$y = f(x) = -2x + 2$

$Dom(f): R$

$Rg(f) = \text{Im}(f): R$

Para este gráfico, observemos: $x_1 = -3;\ x_2 = 3 \Rightarrow x_1 \langle x_2$

Si evaluamos la función en estos puntos: $f(x_1) = f(-3) = -2(-3) + 2 = 6 + 2 = 8$

$f(x_2) = f(3) = -2(3) + 2 = -6 + 2 = -4$

Por lo tanto: $f(x_1) > f(x_2)$

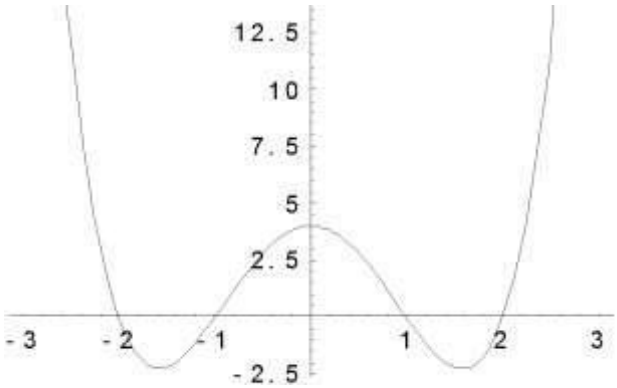
La función es decreciente en todo el Dominio.

Algunas funciones crecen o decrecen en intervalos definidos.

4.3.3 Paridad e Imparidad

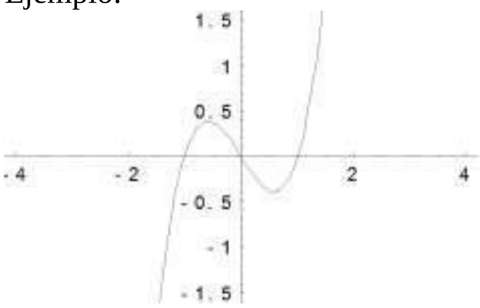
- Una función y =f(x) es ***PAR*** si f(x)= f(-x) $\forall$ x $\in$Dom(f). Gráficamente, una función es par si es simétrica al eje “y”.

Ejemplo



- Una función y =f(x) es ***IMPAR***si f(-x)= - f(x) $\forall$ x $\in$Dom(f). Gráficamente, una función es impar si es simétrica al origen de coordenadas.

Ejemplo:



4.3.4 Intervalos de positividad y negatividad:

Las raíces reales de una función, si es que existen, nos permitirán determinar los intervalos en los cuales la función es positiva y los intervalos en los cuales es negativa.

Los intervalos de positividad (C^+) de una función f(x) son los intervalos de x en los cuales la función es positiva, es decir, donde f(x)>0. Gráficamente corresponde al intervalo (o los intervalos) de valores de "x" en los cuales la "curva" está por encima del eje "x".

Los intervalos de negatividad (C^-) de una función f(x) son los intervalos de x en los cuales la función es negativa, es decir, donde f(x)<0. Gráficamente corresponde al intervalo (o los intervalos) de valores de "x" en los cuales la "curva" está por debajo del eje "x".

En las funciones continuas, los ceros son los valores de “x” que separan los conjuntos de positividad y de negatividad. Como el número cero no es positivo ni negativo, el cero de la función no debe incluirse en los conjuntos de positividad ni de negatividad. En estos casos dichos conjuntos son siempre intervalos abiertos.

En las funciones discontinuas, tanto los ceros como las asíntotas verticales son los valores de “x” que separan (o pueden separar) los conjuntos de positividad y de negatividad. En funciones discontinuas también pueden darse conjuntos de positividad o negatividad cerrados o semicerrados.

4.5. Funcion Inversa

Dada la función biyectiva *f*: x y, se llama función inversa se *f* a la función f^{-1}: y x que asocia a en único elemento

Si f^{-1} es inversa de *f* f^{-1} también es biyectiva y su inversa es *f*.

Ejemplos:

– –

Actividad

Graficar *f* y f^{-1} de los ejemplos, en un mismo par de ejes. Agregar a la misma la grafica de y = x

4.6 Funciones específicas:

4.6.1 Funciones Lineal y Cuadrática.

Función lineal

Son las funciones que pueden llevarse a la forma:

$$y = mx + b$$

Donde *m* y *b* son constantes

Ejemplo: Graficar la función $y = 2x + 1$

Generando una tabulación se tiene:

X	Y
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7

Graficando estos puntos en un plano cartesiano obtenemos la gráfica de la Figura 5

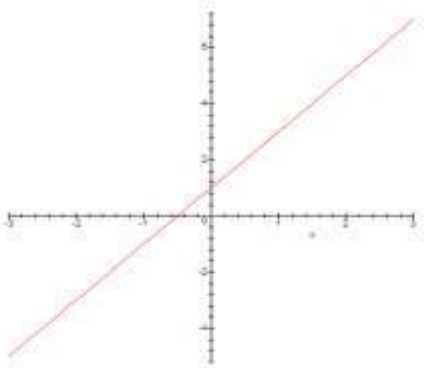


Figura 5 Gráfica de la función $y = 2x + 1$

Función Cuadrática

Son las funciones que pueden llevarse a la forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Donde a , b y c son constantes y $c \neq 0$.

Ejemplo: Graficar la función cuadrática $y = x^2 + x - 6$

Generando una tabulación se tiene:

X	Y
-4	6
-3	0
-2	-4
-1	-6
0	-6
1	-4
2	0
3	6

Graficando estos puntos en un plano cartesiano, obtenemos la gráfica de la función cuadrática, la cual se muestra en la Figura 6

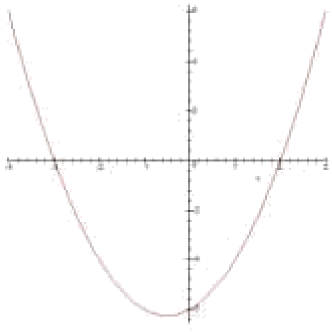


Figura 6 Gráfica de la función $y = x^2 + x - 6$

4.6.2 Función Módulo o Valor Absoluto

El valor absoluto de un número se define como la cantidad que representa independientemente del signo. El valor absoluto de una cantidad se representa por medio de:

$$|x|$$

Ejemplo: Calcular el valor absoluto de las siguientes cantidades:

a) $|2+5|=|7|=7$
b) $|2-7|=|-5|=5$
c) $|6-6|=|0|=0$

Consideremos ahora la gráfica de una función que involucre el valor absoluto de alguna cantidad, por ejemplo:

$$y = |x|$$

A continuación mostraremos una tabulación para la función anterior

X	Y
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

A continuación se muestra la gráfica de la tabulación a través de la Figura 8:

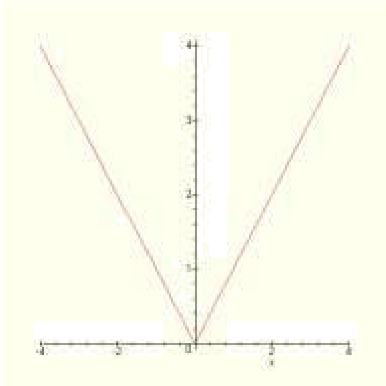


Figura 8 Gráfica de la función $y = |x|$

Actividades:

Generar la gráfica de las funciones:

a) $y = 3x - 2$ *b)* $y = 3x + 2$

c) $y = |x|$ *d)* $y = |x - 1|$

e) $y = x^2 - 9$ *f)* $y = x^2 - x - 6$

g) $y = \dfrac{1}{x}$ *h)* $y = \dfrac{1}{x - 1}$

4.6.3 Funciones exponencial y logarítmica.

4.6.3.1 FUNCIÓN EXPONENCIAL.

Introducción

Siempre que haya un proceso que evolucione de modo que el aumento (o disminución) en un pequeño intervalo de tiempo, sea proporcional a lo que había al comienzo del mismo, ese proceso se describe mediante una exponencial. Por ejemplo:

- Crecimiento de bacterias y otras poblaciones animales o vegetales
- Interés del dinero acumulado
- Desintegración radiactiva

Descripción

Se llaman funciones exponenciales a las funciones de la forma

$$f(x) = a^x$$

Donde la base de la potencia "a" es constante (un número) y el exponente la variable x.

Ejemplo:

Algunos tipos de bacterias se reproducen por "mitosis", dividiéndose la célula en dos cada espacio de tiempo muy pequeño, en algunos casos cada 15 minutos. ¿Cuántas bacterias se producen en estos casos, a partir de una, en un día?

Minutos	15	30	45	60	....
NºBacterias	2	4	8	16	2^x

Siendo x los intervalos de 15 minutos:..24 = 16 en una hora, 28 = 256 en dos horas,... 224·4 = 296 = 7,9·1028. ¡En un día! Esto nos da idea del llamado ¡crecimiento exponencial!, expresión que se utiliza cuando algo crece muy deprisa.

Una propiedad importante que se da en cualquier función exponencial es que el resultado tras un aumento de la variable independiente no depende del calor inicial de la misma, es decir:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{a^{x+h}}{a^x} = \frac{a^x a^h}{a^x} = a^h = f(h)$$

Esta propiedad, así formulada, no nos dice gran cosa; pero llevándola a un ejemplo práctico es de enorme importancia. Por ejemplo, si un bosque crece de forma exponencial y en los últimos 134 se ha duplicado su masa vegetal, volverá a duplicarse en los siguientes 134 años. Es decir, si el bosque ha aumentado en 10 años es 5,31 % podremos asegurar que cada diez años tendrá el 5,31 % más que al comenzar los mismos. Dicho de otra forma, cada 10 años su masa se multiplicará por 1,0531.

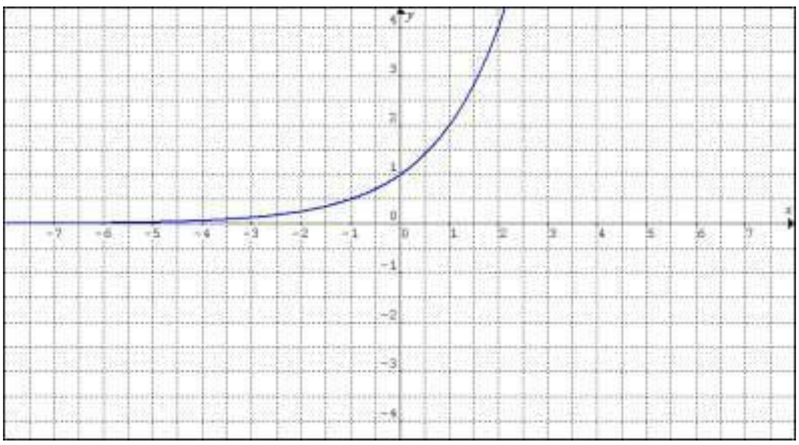
Gráficas

En el siguiente enlace tenemos un programa con el que podemos dibujar las funciones exponenciales de base y exponente que queramos:

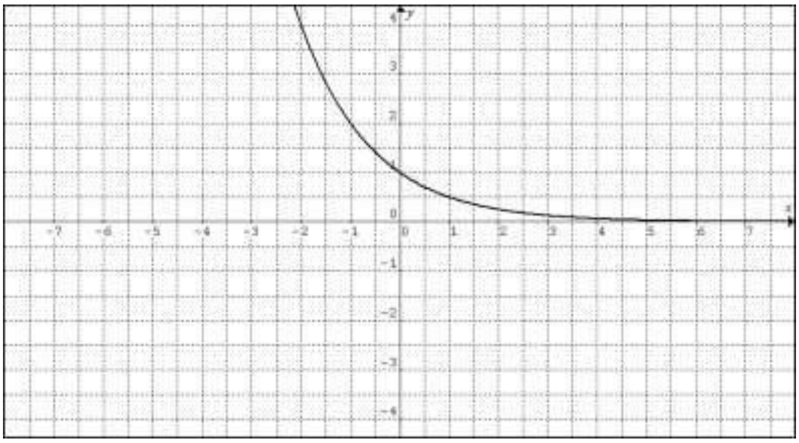
http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_HCS_1/Funcion_exponencial/Funcion_exponencial_1.htm

A continuación dibujamos dos sencillos ejemplos de funciones exponenciales. La base vale 2 en ambos casos, y el exponente que hemos tomado es x en el primer caso y –x en el segundo.

$f(x) = 2^x$



$f(x) = 2^{-x}$

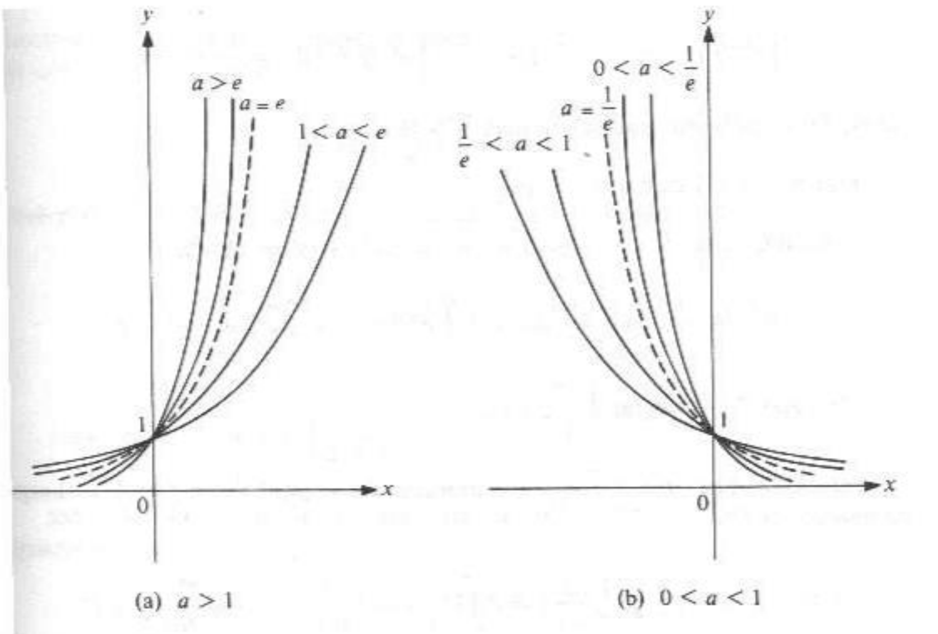


Primeras consecuencias tras observar las gráficas:

Observa que para que la función tenga sentido y se pueda dibujar debe ser a > 0 ¿sabrías decir por qué? Piensa por ejemplo si a = -2, ¿cómo se definiría (-2)1/2? . Lo mismo pasaría con otros valores de x, por lo que la función no tendría sentido. Observa que si a = 0, se trata de la función 0, sin interés.

Observa que la función cuando a > 1 es muy distinta que cuando a < 1, y además que cuando a = 1 se trata de una recta.

En el siguiente dibujo observamos la evolución de la gráfica de la función exponencial según crezca o disminuya la base:



(a) $a > 1$ (b) $0 < a < 1$

Propiedades de las funciones exponenciales

Observa que la función existe para cualquier valor de x (basta con que escribas cualquier valor de x en la ventana inferior de la escena y ver que siempre se obtiene el correspondiente de y, aunque para valores muy grandes de x el programa no presente el que toma "y" realmente por ser muy grande y para valores negativos grandes de x tome como y=0 por valer casi 0). **Decimos que la función existe siempre o que el DOMINIO de la función es todo R.**

Observa que en todos los casos la función pasa por un punto fijo: el (0,1) (basta que asignes el valor a x = 0) o sea que **CORTA AL EJE DE ORDENADAS en el punto (0,1).**

Observa que los valores de y son siempre positivos (prueba cuantos valores desees para x), luego **LA FUNCIÓN SIEMPRE TOMA VALORES POSITIVOS para cualquier valor de x.**

Observa que es siempre creciente o siempre decreciente (para cualquier valor de x), dependiendo de los valores de la base "a". Por tanto **la función es creciente si a>1 y si 0<a<1 es decreciente.**

Observa que se acerca al eje X tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia la derecha en el caso en que a<1 y hacia la izquierda en caso de a>1. Eso implica que **El EJE X ES UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL** (Hacía la izquierda si a>1 y hacía la derecha si a<1)

4.6.3.2 LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Dado que la función exponencial es biyectiva, el teorema de la función inversa nos asegura que existe una función $g(x) = (a^x)^{-1}$. Dicha función es la FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Funcion_logaritmica/Funcion_logaritmo_1.htm

Descripción

Se llaman funciones logarítmicas a las funciones de la forma f(x) = $\log_a$(x) donde "a" es constante (un número) y se denomina la base del logaritmo.

Además sabremos que la base (b) de los logaritmos debe ser un número positivo (al igual que la base de la potencia de una función exponencial) y además no debe ser 1 ya que log1(a) en general no existe ya que si a no es 1 ,1n no puede ser a.

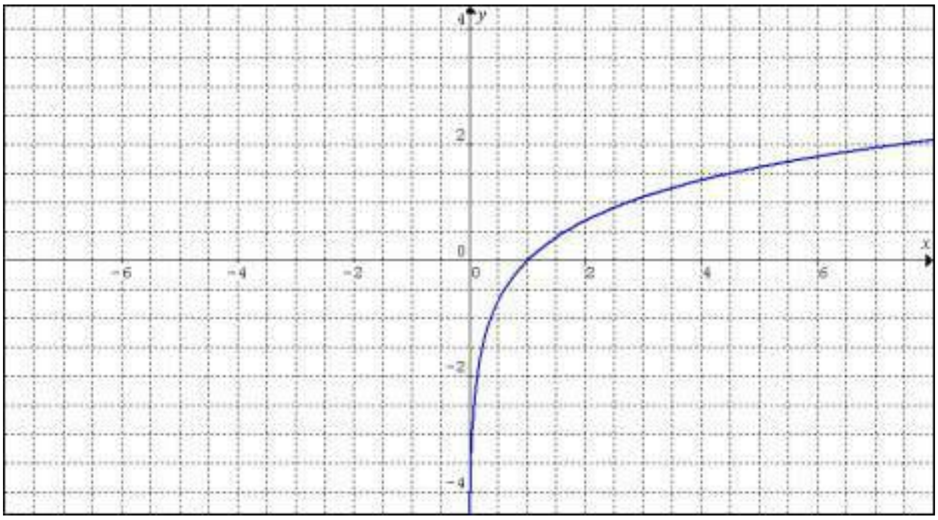
Sabemos también que las bases más frecuentes para los logaritmos son las base 10 (logaritmos decimales) y la base el número "e=2,718281...” (Logaritmos neperianos).

La función logarítmica que más se utiliza en matemáticas es la función "logaritmo neperiano" y se simboliza normalmente como ln (x), (la función logaritmo en base 10 se simboliza normalmente como log(x)). Se trata de la inversa de la exponencial en la que a toma el valor de la constante de Euler: $\ln(x) = (e^x)^{-1}$

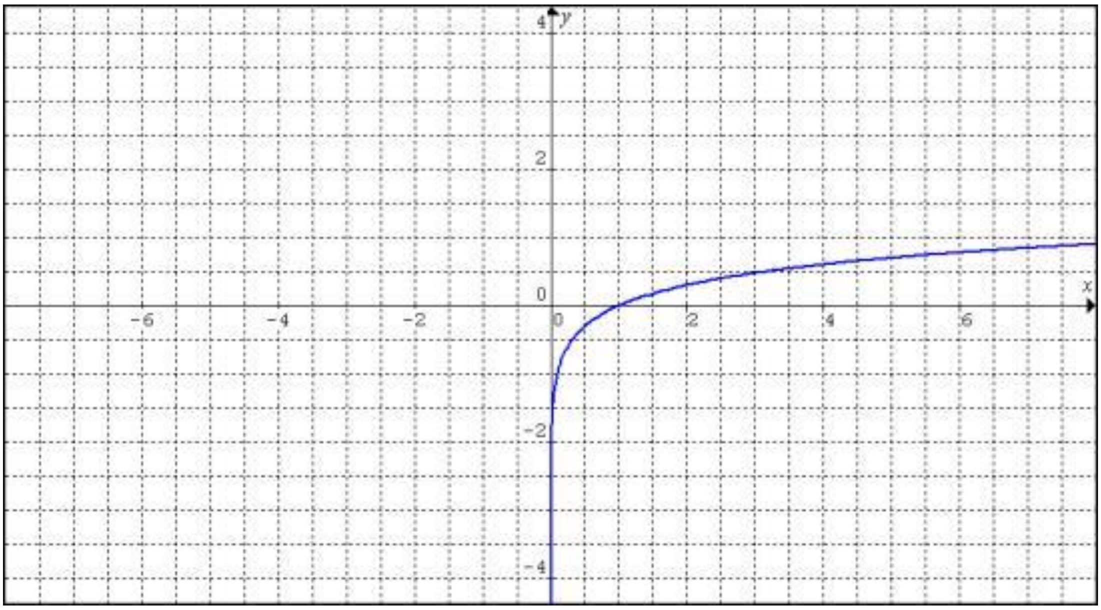
Gráficas

A continuación representamos las gráficas de unas cuantas funciones logarítmicas, para una mayor comprensión de su comportamiento

$$f(x) = \ln(x)$$



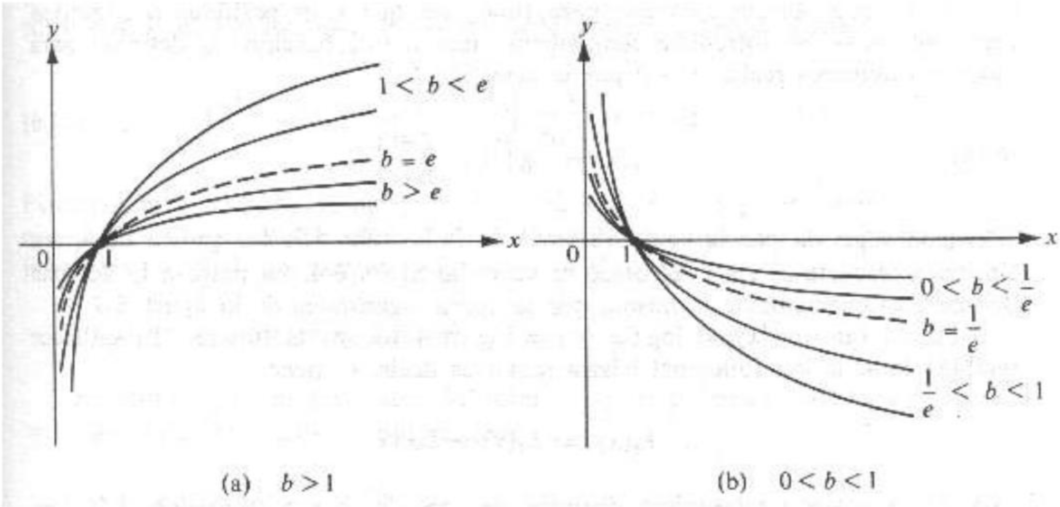
$$f(x) = \log(x)$$



De estas observaciones deducimos las primeras consecuencias para las funciones logarítmicas:

Para que la función tenga sentido y se pueda dibujar debe ser a > 0 y a # 1.

Es necesario advertir la diferencia que vamos a encontrar cuando la base del logaritmo es mayor o menor a 1.



Propiedades:

Supondremos, a partir de ahora, que $a > 1$ y que $a \neq 1$. En esta escena observaremos las propiedades.

Observa que la función existe sólo para valores de x mayores que 0, a diferencia de la exponencial que existe para cualquier valor de x. (puedes utilizar la definición de logaritmo para ver que el logaritmo de un número negativo o de 0 no existen). El DOMINIO de la función logarítmica es $\Re^+$ o el intervalo $(0, \infty)$

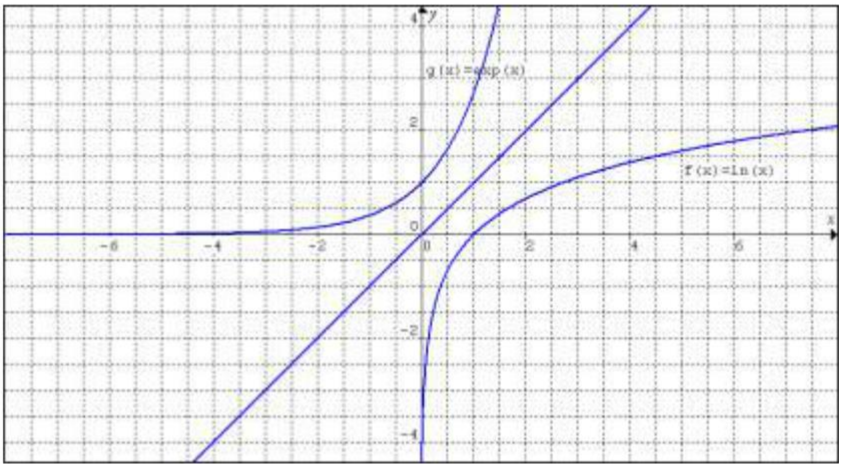
Demuestra numéricamente que $\log_0(a)$, $\log_2(-3)$, $\log_{1/2}(-4)$ y en general $\log_a(b)$, siendo b un número negativo, no existen, utilizando la definición de logaritmo. Obsérvalo en las escenas gráficas.

Observa que en todos los casos la función pasa por un punto fijo: el (1,0) (para verlo basta con que asignes en la escena a x el valor 1 y observes el de y. Por tanto la gráfica siempre:
CORTA AL EJE DE ABSCISAS en el punto (1,0).

Observa que se acerca al eje Y tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia abajo en el caso en que a>1 y hacia arriba en caso de a<1 ("SIEMPRE POR LA DERECHA"), se dice por ello que: **EL EJE Y ES UNA ASÍNTOTA VERTICAL**

4.6.4. Relación entre el logaritmo y la exponencial

Las funciones exponencial y logarítmica se dice que son una inversa de la otra, aunque quizás aun no conocerás el concepto de función inversa. Gráficamente se observa viendo que son simétricas respecto a la recta y = x, como se ve en la escena.



Actividades:

1.- Pedimos dinero en un banco y nos comprometemos a devolverlo todo a los 5 años. Nos dicen que debemos devolver exactamente el doble que lo que los dieron, ¿qué interés nos están pidiendo?

2.- Explica por qué todas las funciones exponenciales pasan por el punto (0,1)

4.6.5 Funciones homográgicas o racionales.

FUNCIONES RACIONALES

Una función racional está formada por la división de dos funciones polinomiales.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Se llaman funciones racionales propias aquellas en las que el grado del polinomio del numerador es menor que el del denominador, $n < m$.

Y se llaman funciones racionales impropias aquellas en las que el grado del polinomio del numerador es mayor o igual que el del denominador, $n \geq m$.

Para las funciones racionales propias, el dominio es el conjunto de todos los reales $\mathbb{R}$ excepto los valores de x que hacen cero al denominador. Su contra dominio requiere analizarse en cada caso.

Ejemplo 1.

Sea la función

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4}{x^3 - 5}$$

El grado del polinomio del numerador es $n = 2$ y el del denominador es $m = 3$. Esta función racional es propia.

Ejemplo 2.

Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 2}$$

El grado del polinomio del numerador es $n = 2$ y el del denominador es $m = 1$. Esta función racional es impropia. Toda función racional impropia se puede reescribir como la suma de un cociente y un residuo; éste último es una función racional propia:

$$f(x) = x + 2 + \frac{7}{x - 2}$$

Gráfica de una función racional propia.

Una función racional propia puede presentar intersección con el eje y (ordenada al origen) e intersecciones con el eje x (raíces).

Para encontrar la ordenada al origen se le da a x el valor de cero y se obtiene el valor de $f(x)$.

Las raíces se buscan dando a $f(x)$ el valor de cero y despejando x.

Ejemplo 3.

Sea la función

$$f(x) = \frac{3x + 4}{2x^2 + 3x + 2}$$

Evaluamos en cero para obtener la ordenada al origen

$$f(0) = \frac{3(0) + 4}{2(0)^2 + 3(0) + 2} = 2$$

E igualamos la función a cero para obtener la raíz

$$0 = \frac{3x + 4}{2x^2 + 3x + 2}$$

$$0 = 3x + 4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Ejemplo 4.

Considere la función

$$f(x)=\frac{3x}{(2x+1)^2}$$

Evaluamos en cero para obtener la ordenada al origen

$$f(0)=\frac{3(0)}{(2(0)+1)^2}=0$$

E igualamos la función a cero para obtener la raíz

$$0=\frac{3x}{(2x+1)^2}$$

$$3x=0$$

$$x=0$$

Ejemplo 5.

Sea la función

$$f(x)=\frac{3}{x+1}$$

Es función racional propia porque el grado del numerador $n = 0$ es menor que el del denominador $m = 1$.

Evaluamos en cero para obtener la ordenada al origen

$$f(0)=\frac{3}{1}=3$$

Igualamos la función a cero para obtener la raíz

$$0=\frac{3}{x+1}$$

$$0\cdot(x+1)=3$$

Y llegamos a una contradicción. Esto implica que no hay ningún valor de x tal que la función valga cero, es decir, no tiene raíces.

Por inspección se ve que la función no está definida cuando $x = -1$.

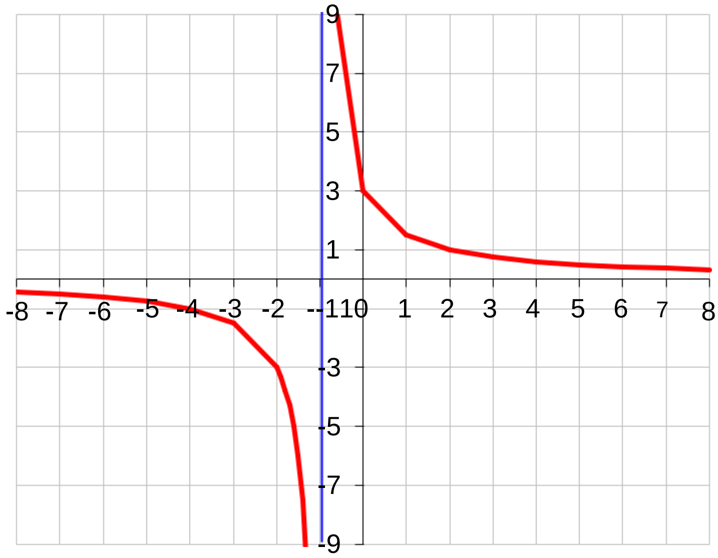
Para aclarar el comportamiento de la función recurrimos a una representación tabular:

x	$f(x)$
-100	-0.0303
-10	-0.3333
-1.01	-300
-1	$\frac{3}{0}$
-0.99	300
0	3
10	0.2727
100	0.0297

En la tabla se ve que para valores de x cada vez más grandes $(x \to \infty)$, los valores de *f(x)* son cada vez menores acercándose a cero ($f(x) \to 0$). Para valores de x cada vez más negativos $(x \to -\infty)$, los valores de *f(x)* también se acercan a cero. Este comportamiento de la función se dice que es asintótico al eje *x*.

También se observa que si nos acercamos a $x = -1$, los valores de *f(x)* son cada vez mayores, ya sea positivos (por la derecha) o negativos (por la izquierda). Otra vez, el comportamiento de la función es asintótico a $x = -1$.

La representación gráfica es la siguiente:



El dominio de esta función es el conjunto de todos los reales, excepto $x = -1$, y el contra dominio es el conjunto de todos los reales, excepto $y = 0$.

Una *asíntota* es una recta a la cual la función se aproxima indefinidamente cuando x ó $f(x)$ tienden a infinito. Hay *asíntotas verticales, horizontales y oblicuas*.
En las funciones racionales propias, el eje x es asíntota horizontal cuando x tiende a infinito.

En las funciones racionales propias, de manera práctica lo que se hace para encontrar las raíces es igualar el numerador a cero y resolvemos. Para encontrar las asíntotas verticales igualamos el denominador a cero y resolvemos.

Ejemplo:

Sea la función

$$f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$$

Es función racional impropia porque el grado del numerador $n = 1$ es igual que el del denominador $m = 1$. Es decir, esta función también se podría escribir de la forma

$$f(x) = \frac{4x+2}{x+3} = 4 - \frac{10}{x+3}$$

Evaluamos en cero para obtener la ordenada al origen

$$f(0) = \frac{2}{3}$$

Igualamos el numerador a cero para obtener las raíces

$$4x + 2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

Para obtener las asíntotas verticales, se iguala el denominador a cero

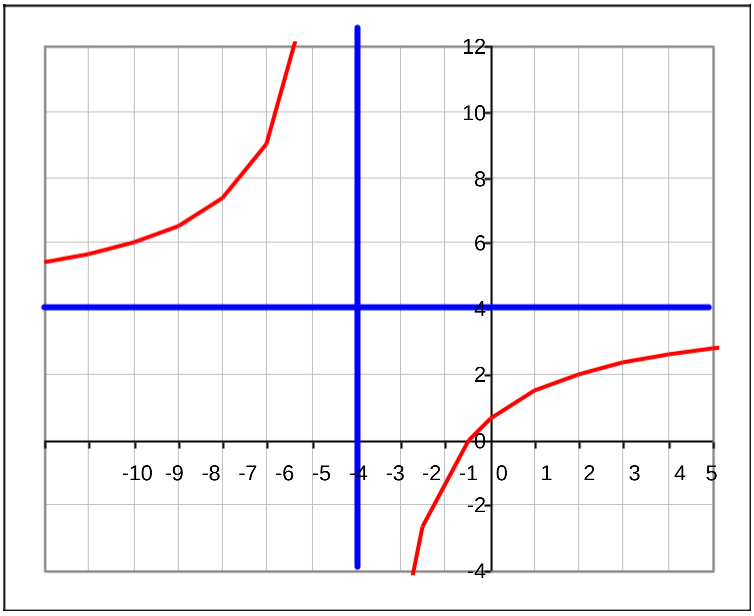
$$x + 3 = 0$$

$$x_2 = -3$$

Tenemos entonces una función con ordenada al origen en $f(x) = \frac{2}{3}$, una raíz en $x_1 = -\frac{1}{2}$, una asíntota vertical en $x_2 = -3$.

En el caso de esta función impropia, la asíntota horizontal es $f(x) = 4$ cuando x tiende a infinito.

La representación gráfica de la función es:



El dominio de esta función es el conjunto de los reales, excepto $x = -3$ y el contra dominio es el conjunto de los reales excepto $y = 4$.

En las funciones racionales, las asíntotas verticales se generan a partir de las raíces del denominador; cuando estas raíces no tienen multiplicidad, o tienen multiplicidad impar, la función tiende a infinito positivo ($f(x) \rightarrow \infty$) de un lado de una asíntota vertical, y del otro lado tiende a infinito negativo ($f(x) \rightarrow -\infty$). Cuando la multiplicidad de las raíces es par, la función se comporta igual a ambos lados de la asíntota vertical.

Anexo Unidad N° 4: FUNCIONES

¿Qué es una función?

En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso. Usamos el término función para describir esta dependencia de una cantidad con respecto a otra.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto B.

Evaluación de una función

En la definición de una función, la variable independiente x desempeña el papel de un símbolo o dígito. Por ejemplo, la función f (x) $3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$

Para evaluar f en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

Ejemplo 1:

Una función f está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 + 4$$

(a) Exprese verbalmente cómo actúa f sobre la entrada x para producir la salida $f(x)$.

(b) Evalúe $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.

(c) Encuentre el dominio y rango de f.

(d) Trace un diagrama de máquina para f.

SOLUCIÓN

(a) La fórmula nos dice que f primero eleva al cuadrado la entrada x y luego suma 4 al resultado. Por tanto, f es la función

"elevar al cuadrado, luego sumar 4"

(b) Los valores de f se encuentran al sustituir por x en la fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

$f(3) = 3^2 + 4 = 13$ — Sustituir x por 3

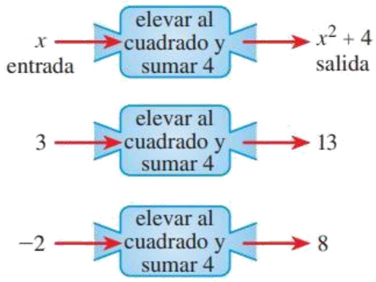
$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8$ — Sustituir x por -2

$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9$ — Sustituir x por $\sqrt{5}$

(c) El dominio de f está formado por todas las posibles entradas para x. Como podemos evaluar la fórmula $f(x) = x^2 + 4$ para cada número real x, el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

El rango de f está formado por todas las posibles salidas de f. Como $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, tenemos $x^2 + 4 \geq 4$, de modo que por cada salida de f tenemos $f(x) \geq 4$. Entonces, el rango de f es $\{y \mid y \geq 4\} = [4, \infty)$.

(d) Un diagrama de máquina para f se ilustra en la Figura



Una función definida por tramos

Ejemplo 2:

Un plan de teléfono celular cuesta $39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cobra $0.20 por cada minuto adicional de uso. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \le x \le 400 \\ 39 + 0.20(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Encuentre C(100), C(400) y C(480).

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. He aquí cómo aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada x. Si $0 \le x \le 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otra parte, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.20((x - 400)$.

Como $100 \le 400$, tenemos $C(100) = 39$.

Como $400 \le 400$, tenemos $C(400) = 39$.

Como $480 > 400$, tenemos $C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$.

Por tanto, el plan cobra $39 por 100 minutos, $39 por 400 minutos y $55 por 480 minutos.

Dominio de una función

Recuerde que el dominio de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real. Por ejemplo, considere las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x - 4} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ne 4\}$. La función g no está definida para x negativa, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ge 0\}$.

Cuatro formas de representar una función

Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (por descripción en palabras)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)
- visualmente (por una gráfica)
- numéricamente (por una tabla de valores)

Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros.

CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbal

Usando palabras:

"Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplicar la temperatura Celsius por $\frac{9}{5}$, luego sumar 32."

Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

Algebraica

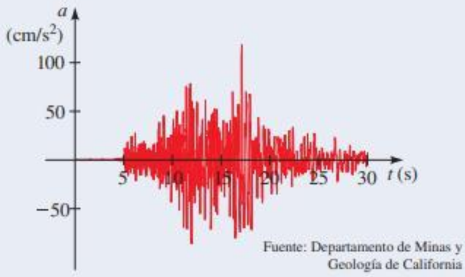
Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Usando una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Usando una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	1.22
$1 < w \leq 2$	1.39
$2 < w \leq 3$	1.56
$3 < w \leq 4$	1.73
$4 < w \leq 5$	1.90
$\vdots$	$\vdots$

Costo de enviar por correo un paquete de primera clase

Ejemplo 3:

Sea $F(C)$ la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius C. (Así, F es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro citado líneas antes da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

(a) Algebraicamente (usando una fórmula)

(b) Numéricamente (usando una tabla de valores)

(c) Visualmente (usando una gráfica)

SOLUCIÓN

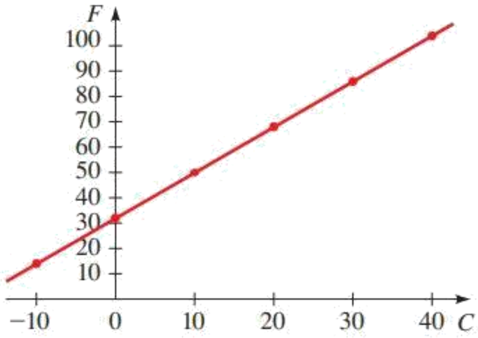
(a) La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada C por $\frac{9}{5}$ y luego sumar 32 al resultado.

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

(b) Usamos la fórmula algebraica para F que encontramos en la parte (a) para construir una tabla de valores:

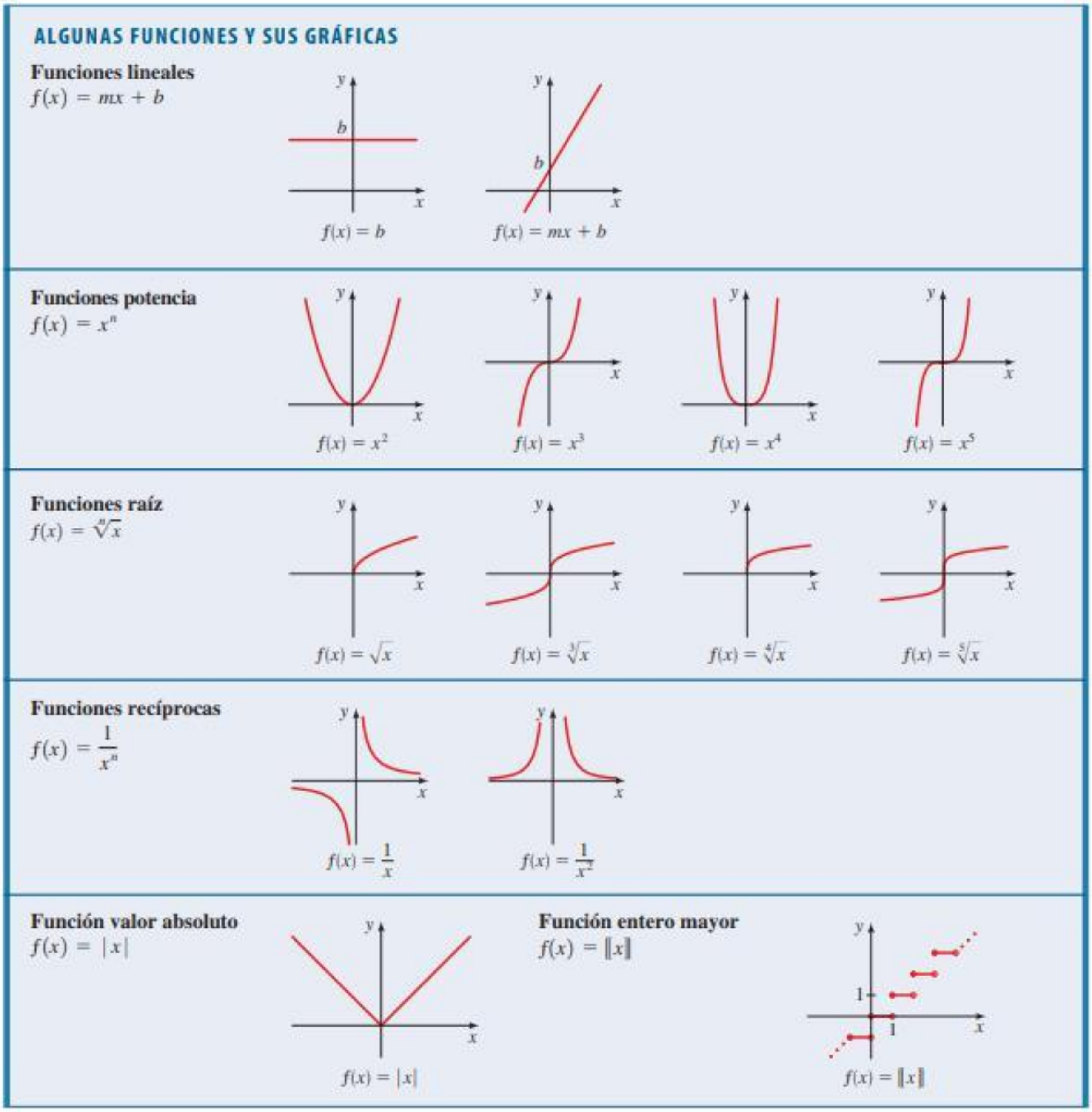
C (Celsius)	F (Fahrenheit)
−10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

(c) Usamos los puntos tabulados en la parte (b) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la Figura 6.



GRAFICAS DE FUNCIONES

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica.

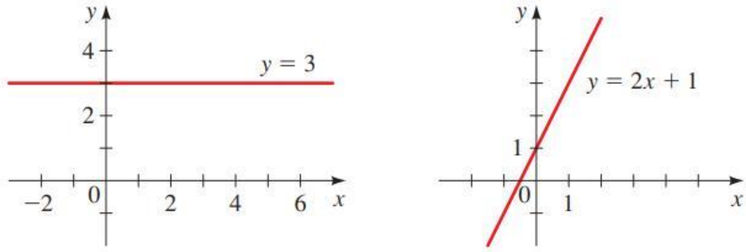


Guía básica para graficar funciones:

En todos los casos es posible realizar una tabla de valores para graficar la función deseada, es decir, encuentro los valores de y correspondientes a los valores de x seleccionados para graficar. Luego, uno los puntos hallados y se obtiene una gráfica de dicha función. Este es el método más seguro y al cual podemos recurrir siempre para verificar si nuestro gráfico es correcto. También es el método utilizado para graficar la mayor parte de las funciones.

En el caso de las <u>funciones lineales</u>, como el gráfico se trata de una recta, basta con dos números para determinar la gráfica. Uno de estos puntos es la ordenada al origen, es decir el punto en que la gráfica corta al eje y. Este punto corresponde al término independiente de nuestra función. El siguiente punto a localizar es la raíz de la

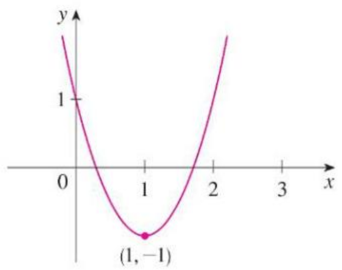
función. Este valor se encuentra igualando la función a cero y despejando x. Luego se unen ambos puntos y se obtiene la recta correspondiente a la función lineal. En el caso de que la función tenga pendiente igual a cero, la recta que se obtiene es paralela al eje x.
Por ejemplo, para la función y = 2x + 1, el término independiente es 1. Cómo se observa en la figura a continuación, este es el valor en el que la función corta al eje y. Ya ubicado un punto de el gráfico, procedemos a encontrar la raíz de la función. Igualando la función a 0: y = 0 = 2x + 1
Entonces, 2x = -1, despejando: x = -1/2. Ubicando este punto en el eje x y uniendo con el punto anterior se obtiene el gráfico de la función.

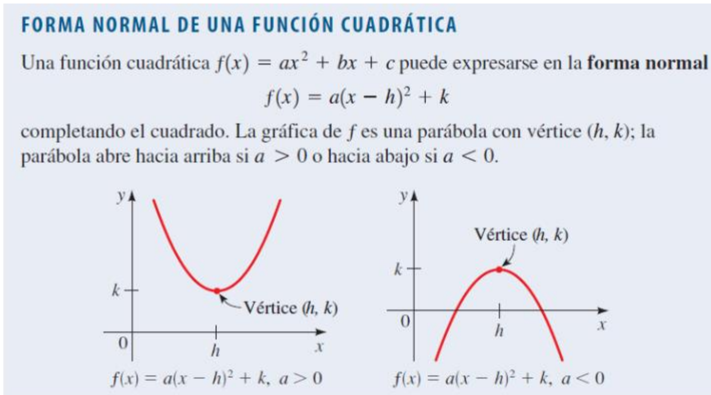


La función constante $f(x) = 3$ La función lineal $f(x) = 2x + 1$

Para las funciones cuadráticas, es posible obtener la ordenada al origen y las raíces de la misma manera. Como se trata de un polinomio de grado dos, a la hora de encontrar las raíces se aplican las reglas de factorización vistas en la unidad de polinomios. Se puede utilizar la fórmula de Bhaskara, la regla de Ruffini, etc. Además, es posible encontrar el punto del vértice de la función. Para el valor de x: xv = -b/2a y el valor de y se encuentra evaluando la función para xv. Con el vértice ubicado, más la ordenada al origen y las raíces es posible graficar dicha función.

Por ejemplo, y = 2x^2 – 4x + 1.
El primer punto lo obtenemos del término independiente del polinomio (1) el cual representa la ordenada al origen de la función. Luego, aplicando $x_1, x_2 = \frac{4 \mp \sqrt{4_2 - 4*2*1}}{2*2}$ obtenemos las raíces y también las ubicamos en el gráfico. Finalmente, el vértice se encuentra en x = 4/(2*2) = 1 y en y = 2(1)^2 – 4(1) + 1 = -1 y el gráfico es el siguiente:





Ejemplo 4: Sea $f = 2x^2 - 12x + 23$.

(a) Exprese *f* en forma normal. **(b)** Trace la gráfica de *f*.

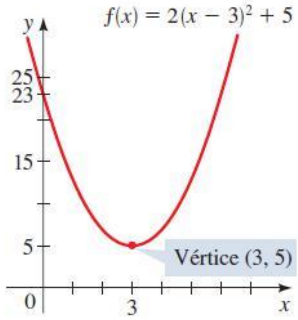
SOLUCIÓN

(a) Como el coeficiente de x^2 no es 1, debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen x antes de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 23 && \text{Factorice 2 de los términos en } x \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 2\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 2(x-3)^2 + 5 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

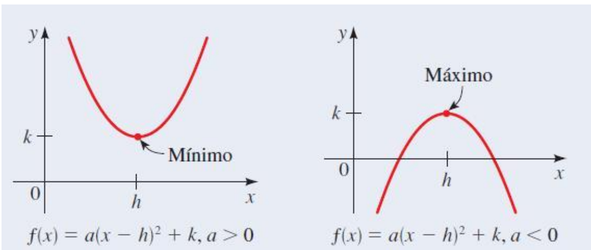
La forma normal es $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

(b) La forma normal nos dice que obtenemos la gráfica de f al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en (3, 5), y la parábola abre hacia arriba. Alargamos la gráfica de la Figura 1 observando que el punto de intersección en y es $f(0) = 23$.



Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Si una función cuadrática tiene vértice (h, k), entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo.



Funciones polinomiales

Una función polinomial de grado n es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman coeficientes del polinomio.

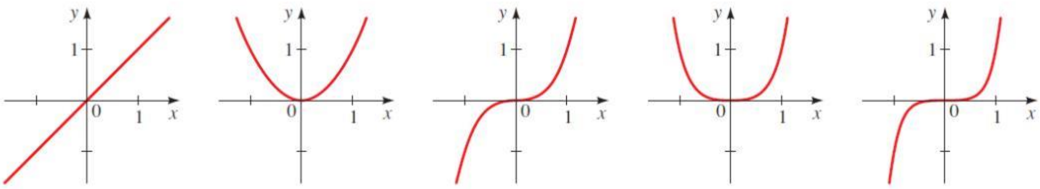
El número a_0 es el coeficiente constante o término constante.

El número a_n, el coeficiente de la mayor potencia, es el coeficiente principal, y el término $a_n x^n$ es el término principal.

Las gráficas de polinomios de grado 0 o 1 son rectas, y las gráficas de polinomios de grado 2 son parábolas. Cuanto mayor sea el grado de un polinomio, más complicada puede ser su gráfica. No obstante, la gráfica de una función polinomial es continua. Esto significa que la gráfica no tiene puntos singulares ni huecos.

Además, la gráfica de una función polinomial es una curva sin irregularidades; esto es, no tiene esquinas ni puntos agudos (cúspides).

Las funciones polinomiales más sencillas son las definidas con monomios $P(x) = x^n$, cuyas gráficas se ven en la siguiente figura. Como lo sugiere la figura, la gráfica de $P(x) = x^n$ tiene la misma forma general que la gráfica de $y = x^2$ cuando n es par y la misma forma general que la gráfica de $y = x^3$ cuando n es impar. Sin embargo, cuando el grado n es más grande, las gráficas se aplanan alrededor del origen y son más pronunciadas en otras partes.



(a) $y = x$ (b) $y = x^2$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^4$ (e) $y = x^5$

Funciones exponenciales y logarítmicas.

Éstas son funciones, como $f(x) = 2^x$, donde la variable independiente está en el exponente. Las funciones exponenciales se usan para modelar numerosos fenómenos del mundo real, como por ejemplo el crecimiento de una población o el crecimiento de una inversión que gana interés compuesto. Una vez obtenido el modelo exponencial, podemos usar el modelo para predecir el tamaño poblacional o calcular la cantidad de una inversión para cualquier fecha futura. Para investigar cuándo una población llegará a cierto nivel, usamos las funciones inversas de funciones exponenciales, llamadas funciones logarítmicas.

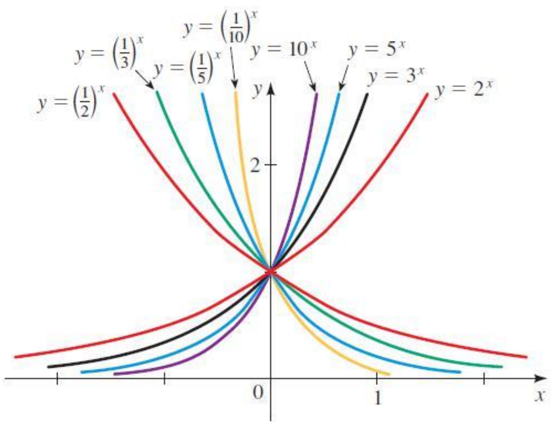
FUNCIONES EXPONENCIALES

La **función exponencial con base *a*** está definida para todos los números reales *x* por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

A la hora de graficar las funciones exponenciales, se realiza una tabla de valores con el rango de interés para cada caso. Algunas de estas funciones son las siguientes:

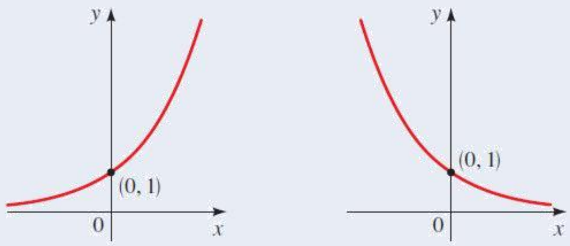


Todas estas gráficas pasan por el punto (0, 1) porque $a^0 = 1$ para toda $a \neq 0$. De la Figura se puede ver que hay dos clases de funciones exponenciales: si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece rápidamente; si $a > 1$, la función aumenta rápidamente.

La función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las siguientes formas.



$f(x) = a^x$ para $a > 1$ $\qquad$ $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

Ejemplo 5:

Use la gráfica de $f(x) = 2^x$ para trazar la gráfica de cada función.

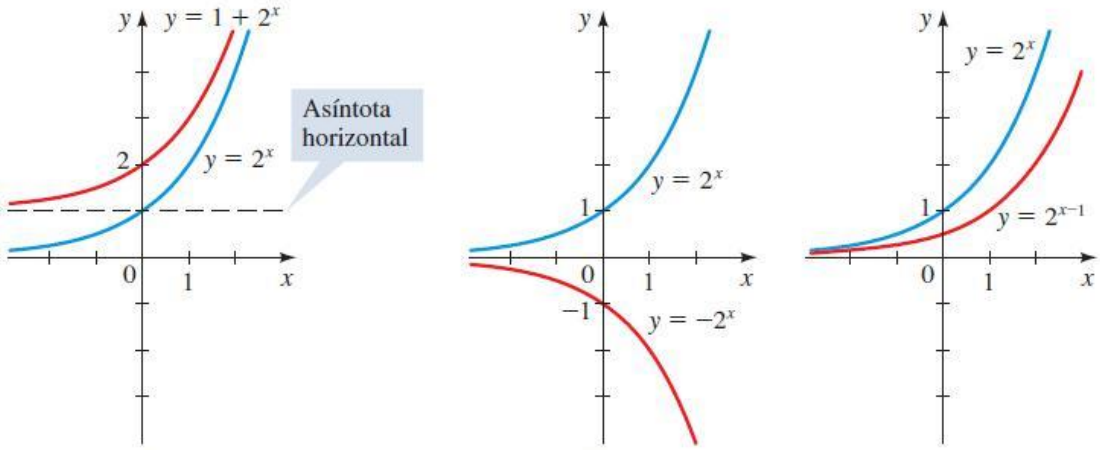
(a) $g(x) = 1 + 2^x$ **(b)** $h(x) = -2^x$ **(c)** $k(x) = 2^{x-1}$

SOLUCIÓN

(a) Para obtener la gráfica de $g(x) = 1 + 2^x$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos 1 unidad hacia arriba. Observe de la Figura 3(a) que la recta $y = 1$ es ahora una asíntota horizontal.

(b) De nuevo empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$, pero aquí reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $h(x) = -2^x$ que se ve en la Figura 3(b).

(c) Esta vez empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos a la derecha 1 unidad para obtener la gráfica de $k(x) = 2^{x-1}$ que se muestra en la Figura 3(c).



(a) (b) (c)

Funciones logarítmicas

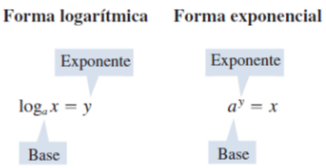
Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, tiene una función inversa. La función inversa f^{-1} se denomina función logarítmica con base a y se denota con $\log_a$.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base a**, denotada por $\log_a$, está definida por

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Por lo tanto, $\log_a x$ es el *exponente* al cual la base a debe ser elevado para obtener x.

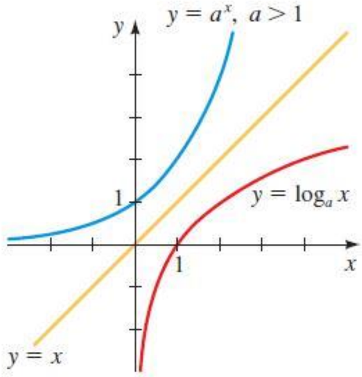


Recuerde que si una función f tiene dominio A y rango B, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A. Como la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio R y rango $(0, \infty)$, concluimos que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango R.

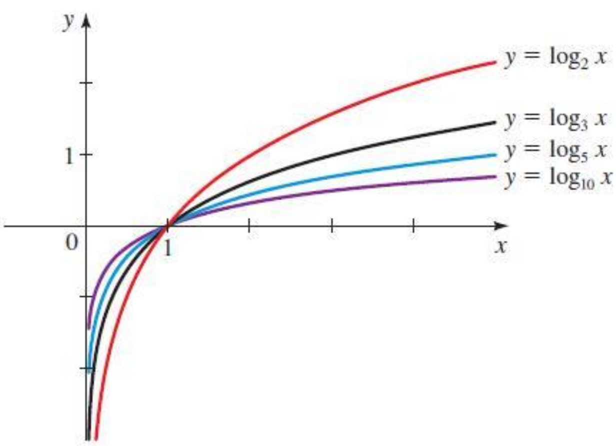
La gráfica de $^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene al reflejar la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$.

La Figura muestra el caso $a > 1$. El hecho de que $y = a^x$ (para $a > 1$) sea una función muy rápidamente creciente para $x > 0$ implica que $y = \log_a x$ es una función muy rápidamente creciente para $x > 1$.

Como $\log_a 1 = 0$, el punto de intersección x de la función $y = \log_a x$ es 1. El eje y es una asíntota vertical de $y = \log_a x$ porque $\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.



La Figura muestra las gráficas de la familia de funciones logarítmicas con bases 2, 3,5 y 10. Estas gráficas se trazan al reflejar las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ en la recta $y = x$. También podemos localizar puntos como ayuda para trazar estas gráficas.



Reflejar gráficas de funciones logarítmicas

Ejemplo 6:

Trace la gráfica de cada función.

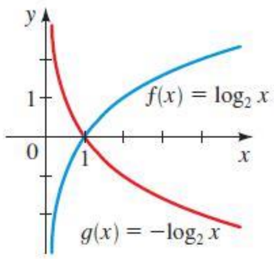
(a) $g(x) = -\log_2 x$

(b) $h(x) = \log_2(-x)$

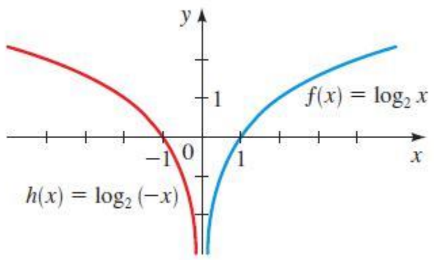
SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $g(x) = -\log_2 x$ en la Figura 5(a).

(b) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $h(x) = \log_2(-x)$ en la Figura 5(b).



(a)



(b)

Desplazar gráficas de funciones logarítmicas

Ejemplo 7:

Encuentre el dominio de cada función y trace la gráfica.

(a) $g(x) = 2 + \log_5 x$

(b) $h(x) = \log_{10}(x - 3)$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_5 x$ (Figura 4) al desplazar hacia arriba 2 unidades (vea Figura 6). El dominio de f es $(0, \infty)$.

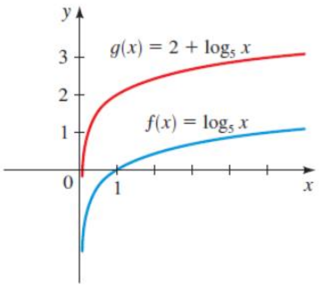
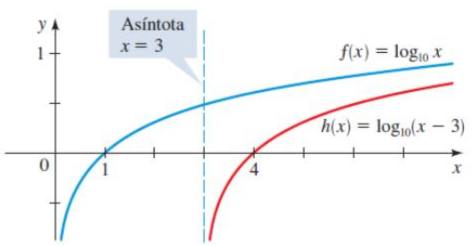


FIGURA 6

(b) La gráfica de h se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_{10} x$ (Figura 4) al desplazar a la derecha 3 unidades (vea Figura 7). La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Como $\log_{10} x$ está definido sólo cuando $x > 0$, el dominio de $h(x) = \log_{10}(x - 3)$ es

$$\{x \mid x - 3 > 0\} = \{x \mid x > 3\} = (3, \infty)$$



Ejercicios Anexos:
Encuentre el dominio de las siguientes funciones.

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$$

$$f(x) = \sqrt{x-5}$$

$$f(t) = \sqrt[3]{t-1}$$

$$h(x) = \sqrt{2x-5}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{3-x}$$

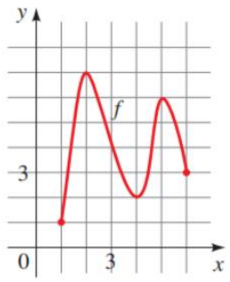
$$g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$$

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-4}}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$$

- Se da una descripción verbal de una función. Encuentre representaciones (a) algebraica, (b) numérica y (c) gráfica para la función.
  - Para evaluar f (x), divida la entrada entre 3 y sume 2/3 al resultado.
  - Para evaluar g(x), reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por 3/4.
  - Sea T(x) la cantidad de impuesto de ventas cobrado en el condado de Lemon por la compra de x dólares. Para hallar el impuesto, tome 8% del precio de compra.
  - Sea V(d) el volumen de una esfera de diámetro d. Para hallar el volumen, tome el cubo del diámetro, luego multiplique por pi y divida entre 6.

■ Estos ejercicios se refieren a la gráfica de la función f que se muestra a continuación.



1. Para hallar el valor de una función $f(x)$ a partir de la gráfica de f, encontramos la altura de la gráfica arriba del eje x en $x =$ ______. De la gráfica de f vemos que $f(3) =$ ______.

2. El dominio de la función f es todos los valores de ___ de los puntos sobre la gráfica, y el rango es todos los valores ____ correspondientes. De la gráfica de f vemos que el dominio de f es el intervalo _____ y el rango de f es el intervalo _____.

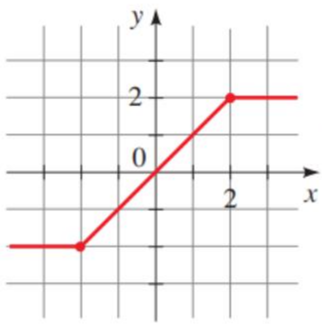
3. **(a)** Si f es creciente en un intervalo, entonces los valores y de los puntos en la gráfica ____ cuando aumentan los valores x. De la gráfica de f vemos que f es creciente en los intervalos _____ y ______.

(b) Si f es decreciente en un intervalo, entonces los valores y de los puntos sobre la gráfica _____cuando aumentan los valores x. De la gráfica de f vemos que f es decreciente en los intervalos _____ y _____.

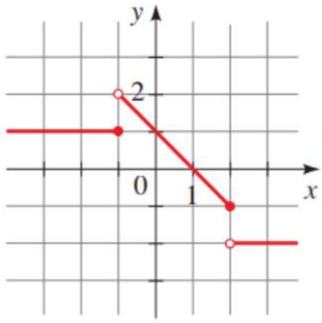
4. **(a)** El valor de una función $f(a)$ es un valor máximo local de f si $f(a)$ es el ______valor de f en algún intervalo que contenga a a. De la gráfica de f vemos que un valor máximo local de f es ____ y que este valor se presenta cuando x es _____.

(b) El valor de una función $f(a)$ es un valor mínimo local de f si $f(a)$ es el ______valor de f en algún intervalo que contenga a a. De la gráfica de f vemos que un valor mínimo local de f es ____ y que este valor se presenta cuando x es _____.

■ Nos dan la gráfica de una función definida por tramos. Encuentre una fórmula para la función en la forma indicada.



$$f(x) = \begin{cases} \quad\_\_\_\_ & \text{si } x < -2 \\ \quad\_\_\_\_ & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ \quad\_\_\_\_ & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \quad\_\_\_\_ & \text{si } x \le -1 \\ \quad\_\_\_\_ & \text{si } -1 < x \le 2 \\ \quad\_\_\_\_ & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Unidad 5:
Trigonometría

5.1 Ángulos y sistemas de medición.

La palabra trigonometría proviene del griego: *trigonos* (triángulo) y *metria*(medida). En sus orígenes esta rama de la matemática se utilizó para resolver problemas de agrimensura y astronomía, pero con el desarrollo de la ciencia se ha convertido en un instrumento indispensable en la física, la ingeniería, la medicina y todo otro proceso en el que se encuentren comportamientos que se repiten cíclicamente. Sirve para estudiar fenómenos vibratorios, como por ejemplo la luz, el sonido, la electricidad., etc.

Sistemas de Medición de Ángulos

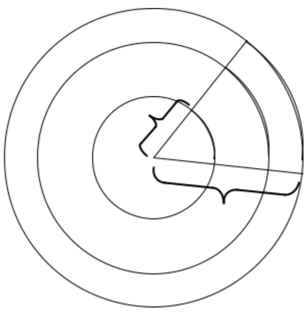
Para medir ángulos pueden adoptarse distintas unidades. Los sistemas más usados son

✓ Sistema sexagesimal, cuya unidad de medida angular es el *grado sexagesimal*, que es la noventa-ava parte del ángulo recto y se simboliza 1º. La sesenta-ava parte de un grado es un minuto (1') y la sesenta-ava parte de un minuto es un segundo (1'').

$$\frac{\text{ángulo recto}}{90}=1^\circ \qquad \frac{1^\circ}{60}=1' \qquad \frac{1'}{60}=1''$$

Un ángulo llano mide 180º y un giro completo mide 360º.

✓ Sistema circular o radial, cuya unidad de medida es el radián. La proporcionalidad que existe entre la longitud *s* de los arcos de dos circunferencias concéntricas cualesquiera determinados por un ángulo central α y los radios *r* correspondientes, permite tomar como medida del ángulo el cociente $\frac{\text{arco}}{\text{radio}}=\frac{s}{r}$. Un ángulo central de 1 radián es aquel que determina un arco que tiene una longitud igual al radio.



$s = r$, por lo tanto $\frac{s}{r}=1$.

Un ***radián*** *es la medida del ángulo con vértice en el centro de la circunferencia y cuyas lados determinan sobre ella un arco s de longitud igual al radio r.*

Ejemplo: Si β determina un arco de 6 cm en una circunferencia de 2 cm de radio, entonces la medida en radianes de β es: $\frac{s}{r}=\frac{6\ \text{cm}}{2\ \text{cm}}=3$. En el sistema circular, β mide 3 radianes, o decimos que mide 3, sin indicar la unidad de medida.

La medida en radianes de un ángulo de un giro es $\frac{2.\pi.r}{r}=2\pi$.

La medida en radianes de un ángulo llano, que es la mitad de un giro, es $\frac{2.\pi.}{2}=\pi$

La medida en radianes de un ángulo recto es $\frac{\pi}{2}$.

Para relacionar un sistema de medición con otro, observamos la siguiente tabla:

Ángulo	Sistema sexagesimal	Sistema circular
1 giro	360º	2 π
llano	180º	π
recto	90º	π/2

¿A cuántos grados sexagesimales equivale un radián?

Haciendo uso de las proporciones y teniendo en cuenta la medida del ángulo llano, tenemos

$$\pi \longrightarrow 180^\circ$$
$$1 \longrightarrow \frac{1\cdot 180^o}{\pi} \cong 57^o 17' 45''$$

Nota: *π es aproximadamente igual a 3,14. Un ángulo de π radianes* ***equivale*** *a un ángulo de 180º. Pero $\pi \neq$* **180.**

Actividad:

a) Expresar en radianes las medidas de los ángulos, si es posible, utilizando fracciones de π:

30º 45º 60º 120º

b) Expresar en grados sexagesimales los siguientes ángulos medidos en radianes:

2 1/2 π/2 2π

c) Efectuar las siguientes operaciones.

- Hallar el ángulo complementario de 56º 41’ 27’’
- Hallar el ángulo suplementario de 102º 25’
- ¿Cuánto mide el ángulo que supera en 12º 33’ a la quinta parte de 39º 40’ ?
- El minutero de un reloj es de 12 cm de largo. ¿Qué recorrido realiza la punta de la manecilla en 20 minutos?

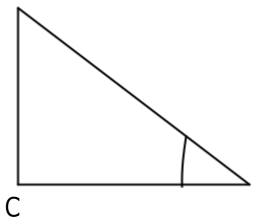
<u>Razones trigonométricas de un ángulo agudo</u>

Recordemos las definiciones de las razones trigonométricas.

$$sen\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

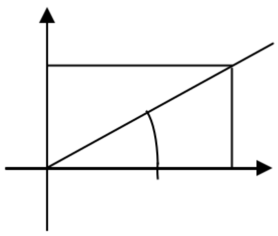
$$cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$tg\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$



Observación: Estas razones dependen sólo del ángulo α y no de las medidas de los lados del triángulo construido.

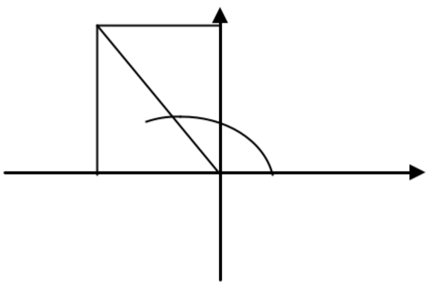
Las definiciones de las razones trigonométricas de ángulos agudos pueden extenderse para cualquier ángulo. Para eso, consideramos el ángulo α en el plano cartesiano, haciendo coincidir su vértice con el origen de un sistema cartesiano ortogonal, y su lado inicial con el semieje positivo de las *x* .



$$sen\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{ordenada de } P}{\overline{OP}} = \frac{y_0}{r}$$

$$cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\textit{abscisa de P}}{\overline{OP}} = \frac{x_0}{r}$$

$$tg\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y_0}{x_0} \quad \text{si } x_0 \neq 0$$



También definimos las **razones trigonométricas recíprocas** de las anteriores, llamadas cosecante, secante y cotangente:

$$\cos ec\ \alpha = \frac{\text{hipotenua}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{r}{y_0}$$

$$\sec\ \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{r}{x_0}$$

$$\cot g\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto op uesto}} = \frac{x_0}{y_0}$$

Nota: Las fórmulas anteriores son válidas cuando no se anulen los denominadores.

También se verifican las siguientes relaciones

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \qquad cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} \qquad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} \qquad cot\ g\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

Ejemplo:

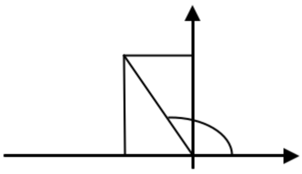
Queremos determinar los valores de las relaciones trigonométricas de un ángulo α cuyo lado terminal pasa por el punto P = (–3 , 4)

$x_0 = -3, \quad y_0 = 4$

$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$sen\ \alpha = \frac{4}{5}$; $\qquad cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$; $\qquad tg\ \alpha = -\frac{4}{3}$

$cosec\ \alpha = \frac{5}{4}$; $\qquad sec\ \alpha = -\frac{5}{3}$; $\qquad cotg\ \alpha = -\frac{3}{4}$



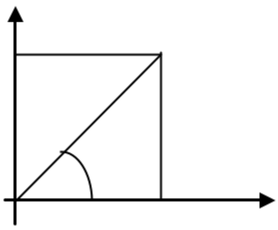
Para un ángulo cualquiera, puede aplicarse el teorema de Pitágoras:

$$(\text{cat. op.})^2 + (\text{cat. ady.})^2 = (\text{hipotenusa})^2$$

Dividimos ambos miembros por (hipotenusa)^2:

$$\frac{(\text{cat. op.})^2}{(\text{hip.})^2} + \frac{(\text{cat. ady.})^2}{(\text{hip.})^2} = \frac{(\text{hip.})^2}{(\text{hip.})^2}$$

$$\frac{(\text{cat. op.})^2}{(\text{hip.})^2} + \frac{(\text{cat. ady.})^2}{(\text{hip.})^2} = 1$$



Resulta, entonces:

$$(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$$

donde por comodidad escribimos $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ y que llamamos **identidad pitagórica**.

Esta identidad, por ejemplo, nos permite calcular las funciones trigonométricas de un ángulo α sabiendo que es agudo y que $sen\alpha = \frac{3}{5}$.

Entonces, si $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \Rightarrow |cos\alpha| = \sqrt{1 - sen^2\alpha}$

y como $\alpha < \pi/2$, $|cos\alpha| = cos\alpha \Rightarrow cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

$$tg\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \quad ; \qquad cosec\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{5}{3}$$

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{4}{3} \quad ; \qquad sec\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{5}{4}$$

Actividad:

Sabiendo que $cos\alpha = \frac{2}{3}$, hallar las restantes relaciones trigonométricas de α.

Con frecuencia se utilizan expresiones que vinculan a cada una de las relaciones trigonométricas con las demás para poder utilizar, en cada caso, la expresión más conveniente.

Por ejemplo, podríamos expresar la tangente de α en función del coseno:

$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$ Y utilizando la identidad pitagórica: $tg\,\alpha = \frac{\pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}}{cos\,\alpha}$.

Análogamente, podemos expresar el coseno de α en función de la tangente de α:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{1 - cos^2\alpha}{cos^2\alpha} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha} - 1 \Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha} \Rightarrow |cos\,\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}.$$

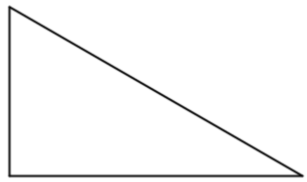
Más adelante veremos cómo seleccionar el signo del resultado.

5.2 Razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triangulo rectángulo. Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver trigonométricamente un triángulo rectángulo consiste en, dados algunos elementos del triángulo, obtener los restantes.

Ejemplo: Resolver el triángulo rectángulo dados la hipotenusa $a = 20$ cm y $\hat{B} = 28º\ 35'$

Entonces los datos son: a y $\hat{B}$, y las incógnitas $\hat{C}$, b y c.



Como $\hat{C}$ y $\hat{B}$ son complementarios, resulta

$\hat{C} = 90º - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 61º25'$

Como $\operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow b = a \operatorname{sen}\hat{B} = 20\text{ cm}\cdot 0,4784 = 9,568\text{ cm}$

Además, $\cos\hat{B} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = a\cos\hat{B} = 20\text{ cm}\cdot 0,8781 = 17,562\text{ cm}$

Actividad:

a) Para un triángulo rectángulo similar al del ejemplo, hallar c, B y C sabiendo que a = 15 cm y b = 9 cm.

b) Un globo sujetado por un cable de 180 m es inclinado por el viento formando el cable un ángulo de 60º con la horizontal. Calcular la distancia del globo al suelo.

c) Calcular la longitud que debe tener una escalera para que apoyada en una pared alcance una altura de 2,85 m al formar con el plano de la base un ángulo de 58º 1'.Rta: 3,36 m.

d) Un alambre carril recto de 320 m une dos estaciones A y B y tiene una pendiente de 0,532. Calcular la diferencia de altura sobre el nivel del mar entre A y B. Rta: 150,23 m.

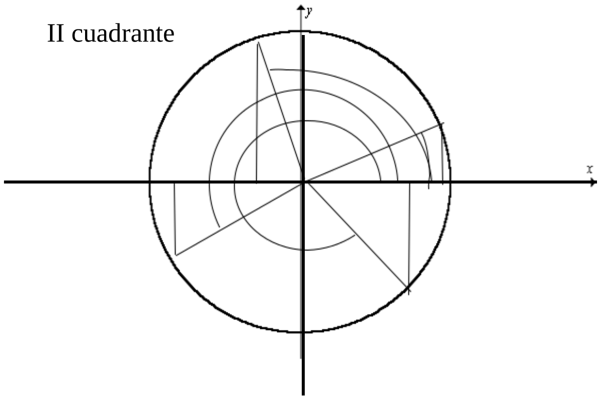
5.3 Circunferencia trigonométrica.

Cuando trabajamos en radianes, las medidas de los ángulos son números reales. Si definimos ángulos orientados esta medida puede tomar valores negativos. Al trabajar con un ángulo en un sistema de coordenadas cartesianas, éste está generado por la rotación de una semirrecta o rayo que parte del semieje positivo de las x.

Si el lado gira en sentido contrario a las agujas del reloj, se dice que el ángulo es **positivo**. Y es **negativo** cuando está generado en sentido horario.

Puede, además, realizar más de un giro completo.

Para referirnos a su ubicación, consideramos el plano cartesiano divido en cuatro sectores, llamados **cuadrantes** y una circunferencia con centro en el origen y radio 1 que llamaremos **circunferencia trigonométrica**



En la figura, como $r = 1$ tenemos que:

$sen\ \alpha = \frac{y_0}{r} = \frac{y_0}{1} = y_0 \Rightarrow$el segmento de ordenadas está relacionado con el $sen\ \alpha$.

$cos\ \alpha = \frac{x_0}{r} = \frac{x_0}{1} = x_0 \Rightarrow$el segmento de abscisas está relacionado con el α

Para hallar el segmento asociado al *sen* β, se construye en el segundo cuadrante el triángulo rectángulo con las componentes de P_1 y el segmento de ordenadas corresponde a seno de β. Análogamente sucede con los ángulos del tercer y cuarto cuadrante, donde el segmento de ordenada se asocia con el seno del ángulo y el segmento de abscisa, con el coseno del ángulo.

Los signos de los valores de las relaciones trigonométricas de los distintos cuadrantes dependen de los signos de las coordenadas del punto sobre el lado terminal del ángulo.

Actividad:

a) La información anteriormente desarrollada se resume en la siguiente tabla, que se debe completar:

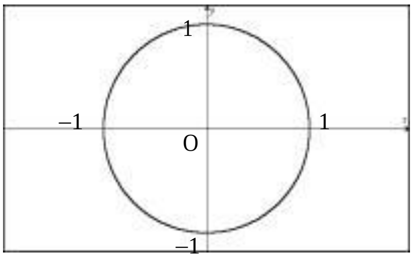
	*sen*α	*cos*α	*tg*α	*cosec*α	*sec*α	*cotg*α
I	+	+	+			
II		−				
III					−	
IV	−					

b) Si $\frac{9}{2}\pi < \beta < 5\pi$, ¿qué se puede asegurar respecto del signo de *sen*β , *cos*β y *tg*β?

Razones trigonométricas de ángulos notables

Para los ángulos de 0, π/2, π y 3π/2, teniendo en cuenta las coordenadas del punto P asociado a cada ángulo en la circunferencia trigonométrica, podemos deducir y completar:

Actividad:



α	0	π/2	π	3 π/2
P		(0;1)		
sen **α**		1		
cos **α**		0		
tg **α**		No existe		

Para los ángulos de 0, π/6, π/4, π/3 y π/2 radianes pueden calcularse las razones trigonométricas usando recursos geométricos. Damos aquí una tabla que contiene los valores de los ángulos notables pertenecientes al primer cuadrante.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
***sen*α**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
***cos*α**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
***tg*α**	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe

Actividad:

Construir y observar la circunferencia trigonométrica y completar en los casos en que existan:

$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$ $\qquad$ cos (4π) =

tg (–5π) = $\qquad$ cosec 0 =

sec π =

Algunas Identidades Trigonométricas

Las siguientes identidades son de utilidad para distintos procedimientos, como cálculos de límites e integrales. No es necesario memorizarlas porque suelen estar incluidas en tablas de derivadas, integrales, etc. Simplemente enumeramos sólo algunas de ellas.

Para α y β cualesquiera:

$$sen\,(\alpha \pm \beta) = sen\alpha\, cos\beta \pm cos\alpha\, sen\beta$$

$$cos\,(\alpha + \beta) = cos\alpha\, cos\beta - sen\alpha\, sen\beta$$

$$cos\,(\alpha - \beta) = cos\alpha\, cos\beta + sen\alpha\, sen\beta$$

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

Para cualquier α :

$$sen\,(2\alpha) = 2\ sen\alpha\, cos\alpha$$

$$cos\,(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$tg\,(2\alpha) = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$$

$$\left| sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}}$$

$$\left| cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}}$$

$$\left| tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \frac{sen\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}$$

$$cos^2\alpha = \frac{1 + cos\,(2\alpha)}{2}$$

$$sen^2\alpha = \frac{1 - cos\,(2\alpha)}{2}$$

Actividad:

Verificar las siguientes identidades (se aconseja trabajar en cada miembro de la igualdad sustituyendo las expresiones por otras identidades conocidas hasta llegar a una igualdad evidente).

Ejemplo:

$$sen\ \alpha\ sec\ \alpha + 1 = \frac{sen\ \alpha + cos\ \alpha}{cos\ \alpha} \quad \Rightarrow sen\ \alpha \quad \frac{1}{cos\ \alpha} + 1 = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

a) $sec\alpha - tg\alpha = \dfrac{cos\ \alpha}{1 + sen\ \alpha}$

b) $sen^2\alpha = 1 - \dfrac{cot\ g^2\ \alpha}{cosec^2\ \alpha}$

c) $(cosec\ \alpha + cotg\ \alpha - 1) \cdot (cosec\ \alpha - cotg\ \alpha + 1) = 2\ cotg\ \alpha$

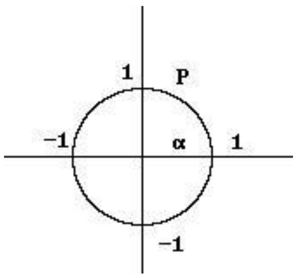
d) $sen^2\alpha + 2\ cos^2\alpha + cos^2\alpha \cdot cotg^2\alpha = cosec^2\alpha$

5.4 Funciones trigonométricas y su análisis:

5.4.1 Seno
5.4.2 Coseno
5.4.3 Tangente

Seno de un ángulo

El punto P, en la figura, se desplaza sobre la circunferencia centrada en el origen y cuyo radio vale 1. Al ángulo de giro lo llamamos α. A la ordenada del punto P la llamaremos **seno** de α. y se representa por: ***sen α***



Actividad:

Completa la siguiente tabla ayudándote de la calculadora:

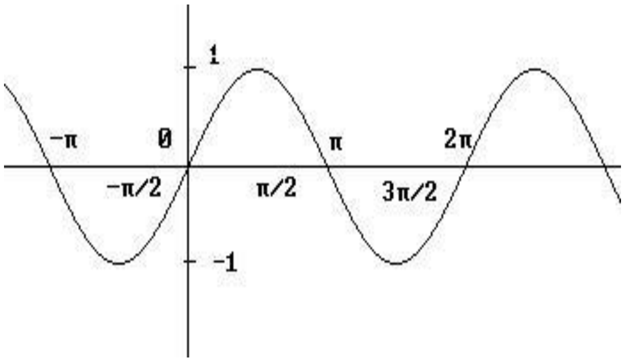
Ángulo	0	30	45	60	90	120	135	150	180	225	270	315	360
sen													

La función seno

Actividad:

Representa la función senα. En el eje de abscisas sitúa los valores del ángulo en grados, en intervalos de 30º desde 0º hasta 360º.

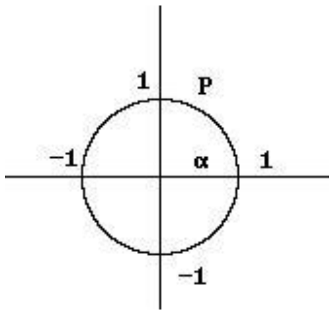
La gráfica que has representado debe de ser semejante a la que tienes a continuación. Ahora en el eje de abscisas aparece la medida del ángulo en radianes.



- Es la gráfica de una función **continua** y definida en R.
- Los valores del seno se repiten cada 2π radianes (cada 360º). Este valor se llama **periodo** de la función.
- Esta gráfica se llama **sinusoide**.

Coseno de un ángulo

Ahora en la figura 3 observaremos la abscisa del punto P. La llamaremos **coseno** del ángulo α. Y se representa por: ***cos*** $\boldsymbol{\alpha}$



Actividad

Completa la siguiente tabla ayudándote de la calculadora:

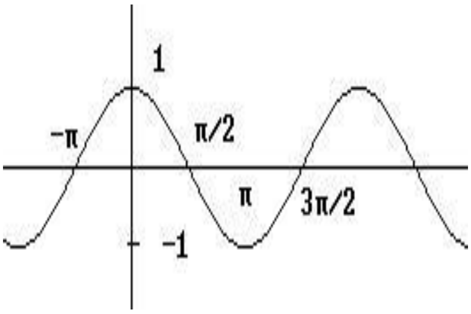
Ángulo	0	30	45	60	90	120	135	150	180	225	270	315	360
cos													

La función coseno

Actividad

Ahora representa la función cos α, en el eje de abscisas sitúa los valores del ángulo en grados, en intervalos de 30º desde 0 hasta 360º.

La gráfica que has representado debe de ser semejante a la que tienes a continuación. Ahora en el eje de abscisas está la medida del ángulo en radianes.



- También su domino es todo el conjunto R y se trata de una función **continua**.
- Los valores del coseno también se repiten cada 2π radianes (cada 360º).
- Esta gráfica se llama **cosinusoide**.

Relaciones entre el seno y el coseno

La relación fundamental de la trigonometría es: $\boxed{\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}}$

Relación que es cierta para cualquier ángulo.

Actividad

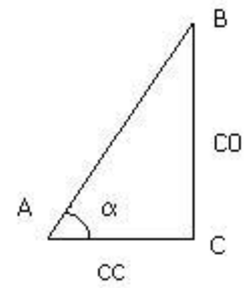
Comprueba esta relación completando la siguiente tabla:

ÁNGULO	Senα	Sen$^2\alpha$	Cosα	Cos^2 (α)	SUMA CUADRADOS
0º					
5º					
0º					
20º					
80º					
70º					
30º					

Actividad:

Demuestra la relación fundamental de la trigonometría ayudándote del Teorema de Pitágoras.

Tangente de un ángulo



Ahora en la figura observaremos el triángulo rectángulo ABC. Al cociente CO/CC lo llamaremos **tangente** de α y se representa por: ***tan* α**. Esta definición sólo es útil para ángulos agudos. En general la tangente de un ángulo cualquiera se define como:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

Actividad:

Completa la siguiente tabla ayudándote de la calculadora*:*

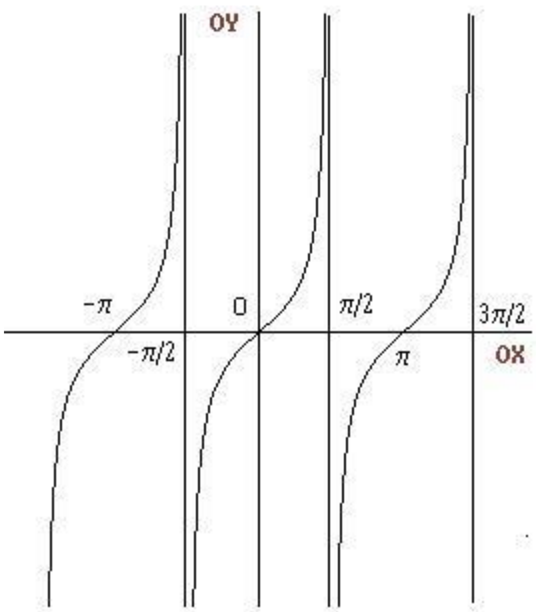
Ángulo	0	30	45	60	90	120	135	150	180	225	270	315	360
tan													

- *¿Qué ocurre con la tangente de 90º y con la de 270º?*

La función tangente

Actividad

Ahora representa la función tan α. Sólo para valores del intervalo [-π/2, π/2]. (Este intervalo en grados sexagesimales se corresponde de –90º hasta 90º). En el eje de abscisas sitúa los valores del ángulo en radianes.



La gráfica de la función tangente que has obtenido será semejante a la que tienes a continuación:

- Esta función **no está definida para cualquier valor de x**. Como has podido ver los ángulos 90º (π/2 rad) y 270º (3π/2 rad) no tienen tangente. Tampoco existe la tangente para los ángulos que se obtiene a partir de los anteriores sumándoles 360º.
- El **dominio** de la función tangente será:

  D(f) = R ~ {π / 2 + k · π siendo k∈ Z}
- Las rectas y = π/2 + k π, son **asíntotas** verticales de la función.
- Los valores de la tangente se repiten cada π radianes (180º).

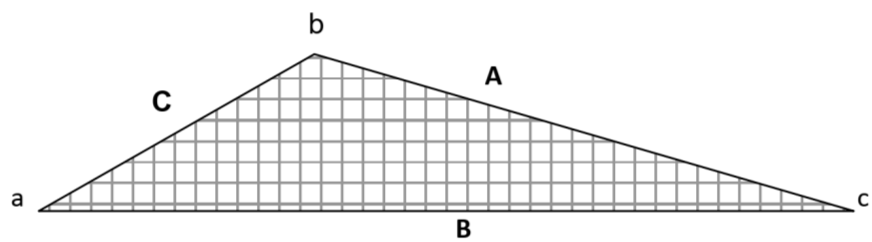
Anexo

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Para resolver ahora un triángulo cualquiera debemos encontrar las medidas de sus lados y/o ángulos a partir de algunos de ellos que son conocidos. Para calcularlos hay que emplear las siguientes relaciones, que se establecen como "Leyes"

LEY DEL SENO

"En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos"



$$\frac{A}{\operatorname{sen}\hat{a}} = \frac{B}{\operatorname{sen}\hat{b}} = \frac{C}{\operatorname{sen}\hat{c}}$$

LEY DEL COSENO

"El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido"

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\ B\ C \cos\hat{a}$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2\ A\ C \cos\hat{b}$$

$$C^2 = B^2 + A^2 - 2\ B\ A \cos\hat{c}$$