Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional del Neuquén
Plaza Huincul - Neuquén

GUÍA DE TRABAJO N°3
ECUACIONES

Durante cientos de años, uno de los tópicos mas importantes en Álgebra ha sido la resolución de ecuaciones; sobre todo por las aplicaciones que tienen en campos científicos y no científicos.
Fórmulas o ecuaciones son usadas a menudo en áreas tales como Física, Química, Ingeniería, Biología, etc…

Definición: llamaremos ecuación en una incógnita *x* a toda igualdad condicionada entre dos expresiones que contengan una, otra o ambas, la incógnita.
Simbólicamente: *P(x)=Q(x)*
Donde *P(x)* y *Q(x)* son expresiones algebraicas que contienen, al menos una de ellas, la incógnita.
P(x) y *Q(x)* constituyen dos expresiones no idénticas, con coeficientes numéricos o literales que llamaremos respectivamente primero y segundo miembro de la ecuación.

Primer miembro $ax + c$	$=$	Segundo miembro $bx + 3$

En una ecuación *P(x)=Q(x)* a el o los valores de *x* que verifican los llamaremos ***raíces o soluciones de la ecuación.***
Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones, pudiéndose dar el caso de que éstas no existan en el conjunto considerado.

Ejemplos:

- Dada la ecuación $2x^2+1=3$ sus raíces son -1 y 1.
- Para la ecuación $x\left(x^2-1\right)=0$ son soluciones 0, -1, 1.
- La ecuación $x^2+4=0$ no tiene solución en R, puesto que $\nexists x \in R$ tal que $x^2=-4$ ya que $x^2 \geq 0 \forall x \in R$.

Ecuaciones Equivalentes

Diremos que dos ecuaciones son equivalentes si toda solución de la primera ecuación es también solución de la segunda y recíprocamente, si toda solución de la segunda es también de la primera.

Ejemplo:
- La siguiente es una sucesión de ecuaciones, cada una de las cuales es equivalente con la anterior.

$$2x-5=3$$
$$(2x-5)+5=3+5$$
$$2x=8$$

$$\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}8$$
$$x = 4$$

Como el conjunto de soluciones de la última ecuación es $\{4\}$, también es el conjunto solución de $2x-5=3$, ya que si comprobamos: 2, $2\cdot 4-5=3$.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación de la forma $ax+b=0$, $a\neq 0$, o que es reducible a esta forma por transformaciones algebraicas, es una ecuación es lineal en x.
Observemos que: $ax+b=0$ es equivalente a:
$a=-b$ y por lo tanto a:
$x=-\dfrac{b}{a}$

Entonces una ecuación lineal $ax+b=0$ donde $a\neq 0$ tiene una solución: $x=-\dfrac{b}{a}$.

Resolver las siguientes ecuaciones y verificar la solución encontrada:

1) $2x+7=0$

2) $6x^2+18x+x+3=3x+4x-2$

3) $x-2=x+7$

4) $\dfrac{x-1}{6}-\dfrac{x-3}{2}=-1$

5) $\dfrac{3}{4}(2x+4)=x+19$

6) $\dfrac{3x-1}{7}-\dfrac{2-4x}{3}=\dfrac{-5x-4}{14}+\dfrac{7x}{6}$

7) $6\left(\dfrac{x+1}{8}-\dfrac{2x-3}{16}\right)=3\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{3}{8}(3x-2)$

8) $2-\left[-2.(x+1)-\dfrac{x-3}{2}\right]=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{5x-3}{12}+3x$

9) Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas.

a)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4 \\ \dfrac{x}{3}+y=1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{y-1}{2}=0 \\ \dfrac{x+2y}{3}-\dfrac{x+y+2}{4}=0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2}=5 \\ 4-\dfrac{2x-y}{2}=1 \end{cases}$$

10) Resuelve por sustitución, igualación, reducción y gráficamente el sistema:

a) $$\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$$

Resolución de problemas

Toda cuestión en la que se persigue la determinación de uno o varios números desconocidos mediante la relación o relaciones que existen entre ellos y otros conocidos, se dice que es un problema.
Los números y las relaciones conocidas, constituyen los datos del problema.
Los números y las relaciones conocidas, constituyen los datos del problema.
Los números cuya determinación se pide son las incógnitas.
En el proceso de resolución algebraica del problema, distinguiremos las etapas siguientes:

a. Representación (empleo del simbolismo algebraico para designar la incógnita y las operaciones en dónde interviene).
b. Planteo de la ecuación.
c. Resolución de la ecuación.
d. Verificación de la solución hallada.

Ejemplos:

- El triplo de un número es igual al número aumento en 8. Hallar el número.

  El número *x*.
  El triplo del número *3x*.
  El número aumento en *8x+8*.

  $3x=x+8$
  $3x-x=8$
  $2x=8$
  $x=4$

  El triplo de 4 es 12 y 4 aumentando en 8 es también 12.

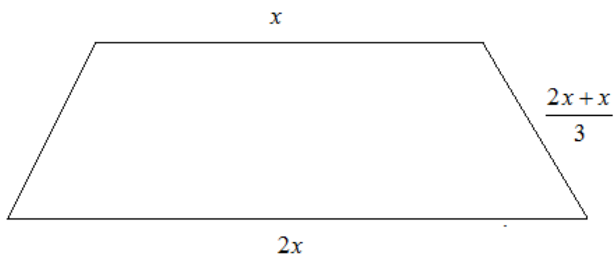
- Mónica y Aldo tienen conjuntamente \$50. Aldo tiene \$12 más que Mónica. ¿Cuántos \$ tiene cada uno?

  Número de \$ que tiene Mónica: *x*.
  Número de \$ que tiene Aldo: *x+12*.
  Número de \$ que tiene en conjunto: *x+(x+12)*.

  $x+(x+12)=50.$
  $2x+12=50$
  $2x=50-12$
  $x=19$

  Mónica tiene \$19 y Aldo tiene \$19+\$12=\$31
  \$19+\$31=\$50

- El perímetro de un trapecio es de 30 cm. La base mayor es el doble de la base menor y el lado oblicuo es igual a la tercera parte de la suma de las bases del trapecio.



$$x+2x+2\frac{2x+x}{3}=30$$
$$x+2x+\frac{4x+2x}{3}=30$$
$$5x=30$$
$$x=6$$

Luego la base menor es 6; la base mayor es $6\cdot 2=12$; lado oblicuo =6.

Resolver:

11) Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

12) En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?

13) Luís hizo un viaje en el coche, en el cual consumió 20 litros de combustible. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió 2/3 del combustible que tenía el depósito y en la segunda etapa, la mitad del que le queda. Se pide:
    a) Litros del combustible que tenía en el depósito.
    b) Litros consumidos en cada etapa.

14) Trabajando juntos, dos obreros tardan en hacer un trabajo 14 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?

15) Halla el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° más que C y que A mide 40° más que B.

Ecuaciones de segundo grado

Definición: se llama ecuación algebraica de segundo grado o ecuación cuadrática a una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

O reducible a esta forma por transferencias algebraicas
En (1) *x* representa la **incógnita** y los coeficientes a, b, c son números.
Se supone $a \neq 0$ pues de lo contrario se reducirá a una ecuación de primer grado (si $b \neq 0$).

Ejemplo:

Son ecuaciones cuadráticas las siguientes:

- $6x^2 - 3x + 5 = 0$
- $4x^2 - 0,2 = 0$
- $x^2 + 13x = 0$
- $2x^2 = 0$
- También lo es: $x(x+1)(x+3) = x^3 + 2x - 5$, ya que por transformaciones algebraicas se obtiene sucesivamente:

  $$x^3 + 4x^2 + 3x = x^3 + 2x - 5$$
  $$4x^2 + x + 5 = 0 \qquad (2)$$

Que es una ecuación de la forma (1) en la ecuación (2) los coeficientes valen: *a=4; b=1; c=5.*
Como hemos dicho el coeficiente *a* debe ser distinto de cero. Cuando *b* o *c* o ambos son nulos, la ecuación se dice **incompleta.**

$$ax^2 + c = 0....(b = 0)$$
$$ax^2 + bx = 0....(c = 0)$$
$$ax^2 = 0....(b = c = 0)$$

Resolución de ecuaciones incompletas

Cuando una ecuación de segundo grado es incompleta, sus soluciones o raíces se determinan fácilmente como muestran los ejemplos siguientes:

Ejemplos:

- Resolver la ecuación:

$$9x^2 - 1 = 0$$
$$9x^2 = 1$$
$$x = \pm\frac{1}{9}$$

Extrayendo raíz cuadrada $x = \pm\frac{1}{3}$.

La ecuación propuesta admite pues dos raíces: $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Comprobación:

$$9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 9 \cdot \frac{1}{9} - 1 = 0$$
$$9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 9 \cdot \frac{1}{9} - 1 = 0$$

- Resolver la ecuación:

$$3x^2 + 2x = 0$$

Sacando *x* factor común. $x(3x + 2) = 0$.
Para que el producto sea cero, debe ser cero al menos uno de los factores; luego se satisfará la ecuación si:
$x = 0$ o $3x + 2 = 0$.

- Resolver la ecuación.

$$6x^2 = 0$$
$$x^2 = 0$$
$$xx = 0$$

$x_1 = 0$; $x_2 = 0$

Fórmula para resolver las ecuaciones de segundo grado

Sea la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ que representa la ecuación de segundo grado. Ésta es la fórmula de resolución de la ecuación general de segundo grado. Las dos raíces están dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$
$$a = 2; b = 5; c = -3$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

Lo que da:

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-5 - 7}{4} = -3$$

Resolver:

16) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

17) $-x^2 + 7x - 10 = 0$

18) $2x - 3 = 1 - 2x + x^2$

19) $x^2 + (7 - x)^2 = 25$

20) $18 = 6x + x(x - 13)$

21) $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$

Carácter de las raíces

En algunos problemas todo lo que se necesita saber acerca de las raíces de una ecuación de segundo grado. Es su carácter o naturaleza. Esta información puede obtenerse sin necesidad de resolver la ecuación.

La expresión: $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo radical en la fórmula de resolución, recibe el nombre de discriminante de la ecuación.
Supongamos que los coeficientes *a, b, c* son números reales.

Discriminante	Raíces
$b^2 - 4ac > 0$	Reales distintas
$b^2 - 4ac = 0$	Reales iguales
$b^2 - 4ac < 0$	Completas

Ejemplos

Ecuación	Discriminante	Carácter de las raíces
$3x^2 - 2x - 5 = 0$	$(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 64$	Reales distintas
$x^2 - 6x + 9 = 0$	$(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 0$	Reales iguales
$x^2 - 4x + 13 = 0$	$(-4)^2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36$	Complejas

Ejemplo:

Hallar el valor de *k* de manera que las raíces de la ecuación:

$3x^2 - 4x + k = 0$, sean iguales.

La condición para que una ecuación de segundo grado tenga raíces iguales es:

$b^2 - 4ac = 0$

En este ejemplo: *a=3; b=-4; c=k.*

$b^2 - 4ac = 16 - 12k = 0$

$k = \dfrac{4}{3}$

Sustituyendo este valor en la ecuación dada, se tiene:

$3x^2 - 4x + \dfrac{4}{3} = 0$, la cual admite a $-\dfrac{2}{3}$ como raíz doble.

Problemas

Estudiaremos ahora algunos problemas que conducen al planteamiento y resolución de una ecuación de segundo grado.

En estos problemas es indispensable verificar si las raíces encontradas satisfacen las condiciones del problema.
Por ejemplo, si se trata de determinar el número de personas que hay en una habitación o el número de lados que tiene un polígono, serán inadmisibles las raíces negativas o fraccionarias.

Ejemplos:

- Hallar los números impares consecutivos, cuyo producto sea 323.

Sea *x* el número impar. El impar siguiente será *x+2*, el producto de ambos: *x(x+2)*.
Luego:
$x(x+2)=323$
Operando: $x^2+2x-323=0$ y aplicándola la fórmula:
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+1292}}{2}=\frac{-2\pm 36}{2}$$
$x_1=17$
$x_2=-19$
Si *x=17* el impar siguiente es *17+2=19.*
Si *x=-19* el impar siguiente es *-19+2=-17.*
Por lo tanto, el problema admite como soluciones *17* y *-19.*
Comprobación: $17\cdot 19=323$ y $-17\cdot -19=323$.

- Un rectángulo tiene de largo 5 m mas de ancho. Si su área es de 204m^2; ¿cuáles son sus dimensiones?

Anchura: *x*
Longitud: *x+5*
Área: *x(x+5)*

Luego será:
$x^2+5x-204=0$

Aplicando la fórmula obtenemos: $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+816}}{2}=\dfrac{-5\pm 29}{2}$
$x_1=12$
$x_2=-17$
Desechamos la solución negativa y tendríamos *12cm* para el ancho y *12+5=17m* para el largo.
Comprobación: $12m\cdot 17m=204m^2$

- La suma *S* de los primeros n números naturales, a saber: *1++2+3+4+……..n.*

Esta dada por la fórmula: $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Calcular el valor de *n* cuando *S=136.*
Será $\dfrac{n(n+1)}{2}=136$
Lo que es equivalente a: $n^2+n-272=0$. Aplicando la fórmula:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1088}}{2} = \frac{-1 \pm 33}{2}$$

$n_1 = 16$

$n_2 = -17$

La solución negativa se desecha, pues $n \in \mathrm{N}$.

Resolver:

22) Escribir una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: 3 y −2.

23) Determinar k de modo que las dos raíces de la ecuación $x^2 - kx + 36 = 0$ sean iguales.

24) Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2.

25) Dos caños A y B llenan juntos una piscina en dos horas, A lo hace por sí solo en tres horas menos que B. ¿Cuántas horas tarda a cada uno separadamente?

26) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.

27) Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.